

Система массового обслуживания с взаимопомощью между каналами и ограниченным временем пребывания в очереди

Д.А. Ахметшин, А.С. Титовцев

Казанский национальный исследовательский технологический университет, Казань

Аннотация: В настоящем исследовании предложена новая модель открытой многоканальной системы массового обслуживания, которая сочетает взаимопомощь между каналами с ограниченным временем ожидания заявок в очереди. Также представлены общие математические зависимости, описывающие вероятностные характеристики данной системы.

Ключевые слова: система массового обслуживания, очередь, обслуживающее устройство, взаимопомощь между каналами

Введение

Системы массового обслуживания (СМО) с ограниченным временем ожидания заявок в очереди исследовались в работах [1-3]. В научной литературе такие системы также именуется СМО с «нетерпеливыми» заявками [4-6]. Эти модели пригодны для описания передачи трафика в компьютерных сетях с пакетной коммутацией, где время жизни пакетов ограничено.

СМО, предусматривающие взаимопомощь между каналами, рассмотрены в исследованиях [7-9]. Такие модели находят применение в кластерных системах [10], где одну задачу могут обрабатывать несколько вычислительных узлов.

В данной работе предложена комбинированная модель открытых многоканальных СМО, объединяющая взаимопомощь между каналами и ограниченное время ожидания заявки в очереди. Граф состояний и переходов этой СМО представлен на рисунке 1. Предполагая, что поток заявок в систему является пуассоновским, а время обслуживания распределено по экспоненциальному закону, можно получить непрерывную марковскую цепь, описывающую процесс гибели и размножения.

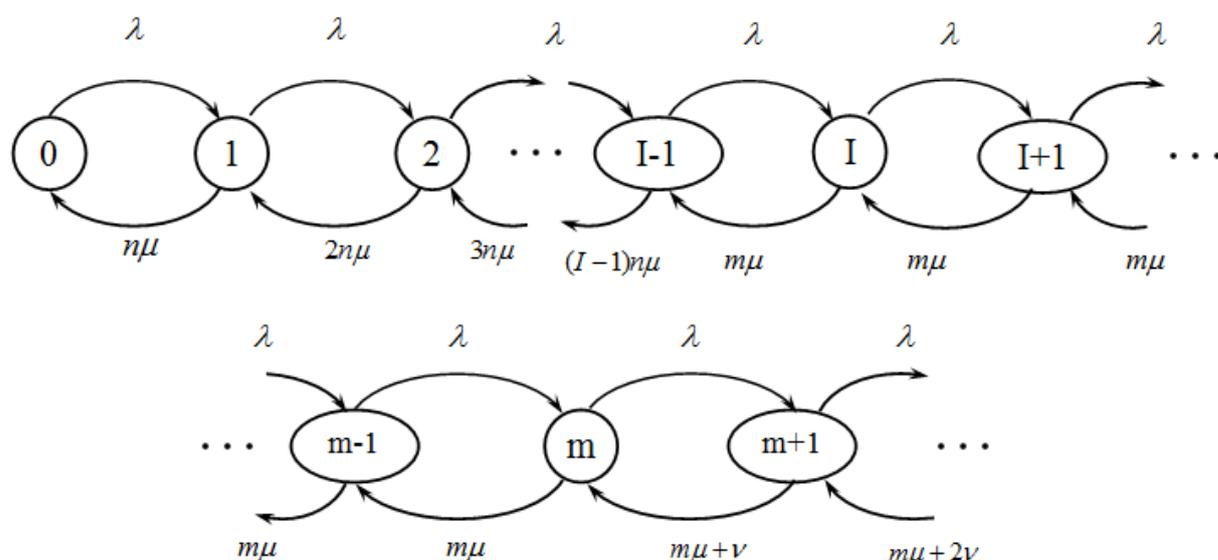


Рис. 1. – Граф состояний и переходов СМО

Материалы и методы исследования

Введем основные обозначения:

λ - средняя скорость поступления заявок в систему;

μ - средняя скорость обслуживания заявки одним обслуживающим устройством;

ν - средняя скорость выбывания «нетерпеливых» заявок, не дождавшихся обслуживания;

$\rho = \frac{\lambda}{\mu}$; $\beta = \frac{\nu}{\mu}$ - Указаны интенсивности поступающего потока заявок и потока «нетерпеливых» заявок;

m – общее количество обслуживающих устройств в системе;

n – число обслуживающих устройств, способных одновременно обрабатывать одну заявку.

I – состояние системы (количество заявок), при котором задействованы все имеющиеся обслуживающие устройства;

$I \cdot n = m$, причем $n < m$.

По графу составим систему уравнений Колмогорова [11, 12], которая с учетом условия нормировки имеет единственное решение.

$$P_1 = \frac{\lambda}{n\mu} P_0;$$

$$P_2 = \frac{\lambda}{2n\mu} P_1 = \frac{\lambda^2}{2n^2\mu^2} P_0;$$

$$P_3 = \frac{\lambda}{3n\mu} P_2 = \frac{\lambda^3}{3!n^3\mu^3} P_0;$$

...

$$P_I = \frac{\lambda}{m\mu} P_{I-1} = \frac{\lambda}{m\mu} \frac{\lambda^{I-1}}{(I-1)!n^{I-1}\mu^{I-1}} P_0 = \frac{\lambda^I}{I!n^I\mu^I} P_0;$$

$$P_{I+1} = \frac{\lambda}{n\mu} P_I = \frac{\lambda}{m\mu} \frac{\lambda^I}{I!n^I\mu^I} P_0 = \frac{\lambda^{I+1}}{II!n^{I+1}\mu^{I+1}} P_0;$$

$$P_{I+2} = \frac{\lambda}{n\mu} P_{I+1} = \left(\frac{\lambda}{m\mu}\right)^2 \frac{\lambda^I}{I!n^I\mu^I} P_0 = \left(\frac{\lambda}{m\mu}\right)^2 P_I;$$

...

$$P_{I+1} = \left(\frac{\lambda}{m\mu}\right)^I P_I;$$

$$P_{I+2I} = \left(\frac{\lambda}{m\mu}\right)^{2I} P_I;$$

...

$$P_m = P_{nI} = \left(\frac{\lambda}{m\mu}\right)^{(n-1)I} P_I = \left(\frac{\lambda}{m\mu}\right)^{m-I} P_I;$$

$$P_{m+1} = \frac{\lambda}{m\mu + \nu} P_m;$$

$$P_{m+2} = \frac{\lambda}{m\mu + 2\nu} P_{m+1} = \frac{\lambda^2}{(m\mu + \nu)(m\mu + 2\nu)} P_m;$$

...

Распишем условие нормировки:

$$\begin{aligned}
 & P_0 + \frac{\rho}{n} P_0 + \frac{1}{2!} \left(\frac{\rho}{n}\right)^2 P_0 + \frac{1}{3!} \left(\frac{\rho}{n}\right)^3 P_0 + \dots + \frac{1}{I!} \left(\frac{\rho}{n}\right)^I P_0 + \frac{\rho}{m} \frac{1}{I!} \left(\frac{\rho}{n}\right)^I P_0 + \left(\frac{\rho}{m}\right)^2 \frac{1}{I!} \left(\frac{\rho}{n}\right)^I P_0 + \dots \\
 & + \left(\frac{\rho}{m}\right)^I \frac{1}{I!} \left(\frac{\rho}{n}\right)^I P_0 + \dots + \left(\frac{\rho}{m}\right)^{2I} \frac{1}{I!} \left(\frac{\rho}{n}\right)^I P_0 + \dots + \left(\frac{\rho}{m}\right)^{m-1} \frac{1}{I!} \left(\frac{\rho}{n}\right)^I P_0 + \frac{\rho}{m+\beta} \left(\frac{\rho}{m}\right)^{m-1} P_0 + \\
 & + \frac{\rho^2}{(m+\beta)(m+2\beta)} \left(\frac{\rho}{m}\right)^{m-1} \frac{1}{I!} \left(\frac{\rho}{m}\right)^{m-1} \frac{1}{I!} \left(\frac{\rho}{n}\right)^I P_0 + \dots = 1,
 \end{aligned}$$

откуда получим вероятность простоя СМО:

$$P_0^{-1} = e_{I-1} \left(\frac{\rho}{n}\right) + \frac{1}{I!} \left(\frac{\rho}{n}\right) \left[\sum_{i=0}^{m-1} \left(\frac{\rho}{m}\right)^i + \left(\frac{\rho}{m}\right)^{m-1} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{\rho}{\beta}\right)^i}{\left(\frac{m}{\beta} + 1\right)_i} \right],$$

где $\left(\frac{m}{\beta} + 1\right)_i$ - символ Похгаммера.

Решив систему уравнений, получим стационарное распределение вероятностей возможных состояний СМО:

$$P_i = \begin{cases} \frac{1}{i!} \left(\frac{\rho}{n}\right)^i P_0, & 0 \leq i \leq I \\ \frac{1}{I!} \left(\frac{\rho}{m}\right)^{i-1} P_0 \left(\frac{\rho}{m}\right)^{i-I}, & I \leq i \leq m \\ \left(\frac{\rho}{m}\right)^{m-1} \frac{1}{I!} \left(\frac{\rho}{n}\right)^I P_0 \frac{\left(\frac{\rho}{\beta}\right)^{i-m}}{\left(\frac{m}{\beta} + 1\right)_{i-m}}, & i \geq m \end{cases}$$

Таким образом, вероятность ожидания обслуживания для вновь поступившей заявки определяется следующим образом:

$$\begin{aligned}
 P_{ож} &= \sum_{i=m}^{\infty} P_i = \left(\frac{\rho}{m}\right)^{m-1} \frac{1}{I!} \left(\frac{\rho}{n}\right)^I P_0 \sum_{i=m}^{\infty} \frac{(\rho/\beta)^{i-m}}{\left(\frac{m}{\beta} + 1\right)_{i-m}} = \\
 &= \left(\frac{\rho}{m}\right)^{m-1} \frac{1}{I!} \left(\frac{\rho}{n}\right)^I P_0 \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(\rho/\beta)^i}{\left(\frac{m}{\beta} + 1\right)_i} = \left(\frac{\rho}{m}\right)^{m-1} \frac{1}{I!} \left(\frac{\rho}{n}\right)^I P_0 \Gamma\left(\frac{m}{\beta} + 1\right) \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(\rho/\beta)^i}{\Gamma\left(\frac{m}{\beta} + 1 + i\right)} = \\
 &= \left(\frac{\rho}{m}\right)^{m-1} \frac{1}{I!} \left(\frac{\rho}{n}\right)^I \Gamma\left(\frac{m}{\beta} + 1\right) E_1\left(\frac{\rho}{\beta}, \frac{m}{\beta} + 1\right) P_0.
 \end{aligned}$$

Вероятность немедленного обслуживания для вновь поступившей заявки определяется следующим образом:

$$P_{HO} = \sum_{i=0}^{m-1} P_i = \sum_{i=0}^{m-1} \frac{1}{i!} \left(\frac{\rho}{n}\right)^i P_0 + \sum_{i=1}^{m-1} \frac{1}{i!} \left(\frac{\rho}{n}\right)^i P_0 \left(\frac{\rho}{m}\right)^{i-1} = e_{i-1} \left(\frac{\rho}{n}\right) P_0 + \frac{1}{i!} \left(\frac{\rho}{n}\right)^i P_0 \sum_{i=0}^{m-1-i} \left(\frac{\rho}{m}\right)^i.$$

В ходе настоящего исследования были определены вероятностные характеристики системы массового обслуживания, что позволяет вычислить её количественные и временные параметры. Это, в свою очередь, дает возможность оценить производительность системы при заданных входных параметрах модели. Кроме того, такие характеристики позволяют установить необходимое количество обслуживающих устройств для достижения требуемого уровня производительности системы или обеспечения заданного качества обслуживания.

Литература

1. Кирпичников А.П. Методы прикладной теории массового обслуживания / Науч. Ред. А.М. Елизаров. Изд. 2-е доп., М.: ЛЕНАНД, 2018. 224 с.
2. Бусарев М.И., Кирпичников А.П., Флакс Д.Б. Одноканальная система массового обслуживания с ограниченным средним временем пребывания заявки в системе в целом // Вестник Казанского технологического университета. 2011. № 22. С. 155-161.
3. Радченко Т.А., Дылевский А.В. Методы анализа систем массового обслуживания. Воронеж: Изд-во Воронежского гос. ун-та, 2011. 75 с.
4. Южаков А.А. Прикладная теория систем массового обслуживания. Пермь: Изд-во СПБГУ ИТМО, 2004. 121 с.

5. Евдонин Г.А., Попова Е.Н., Тагильцева Е.И. Моделирование систем массового обслуживания с взаимопомощью каналов // Управленческое консультирование. 2013. №1 (49). С. 109-114.

6. Панкратов А.А., Анисимова Г.Б. Создание информационной системы для оптимизации работы автостоянки // Инженерный вестник Дона, 2018, №4. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n4y2018/5407/.

7. Титовцев А.С., Томилова М.Н. Характеристики открытых многоканальных систем массового обслуживания с частичной взаимопомощью между каналами и ограниченным предельным объемом накопителя // Научно-технический вестник Поволжья. 2021. № 10. С. 109-112.

8. Титовцев А.С., Томилова М.Н. Численное исследование стабильных режимов работы открытых многоканальных систем массового обслуживания с частичной взаимопомощью между каналами и ограниченным предельным объемом накопителя // Научно-технический вестник Поволжья. 2021. № 10. С. 113-116.

9. Царькова Е. Г. Математическая модель управления системой массового обслуживания с динамической дисциплиной обслуживания заявок // Инженерный вестник Дона, 2022, №5. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n5y2022/7638/.

10. Ахметшин Д.А. Кластеризации больших данных на основе микросервисной архитектуры / Научно-технический вестник Поволжья. 2023, т.12, с.27-30

11. Kirpichnikov A., Titovtsev A., Yakimov I. Mittag-Leffler function in applied problems of queuing theory // Communications in Computer and Information Science. 2018. Т. 912. pp. 225-235.

12. Nazarov A., Kvach A., Sztrik J. Comparative analysis of methods of residual and elapsed service time in the study of the closed retrial queuing system

M/GI/1//N with collision of the customers and unreliable server // Communications in Computer and Information Science. 2017. Vol.800. pp. 97-110.

References

1. Kirpichnikov A.P. Metody` prikladnoj teorii massovogo obsluzhivaniya [Methods of Applied Queuing Theory]. Nauch. Red. A.M. Elizarov. Izd. 2-e dop., M.: LENAND, 2018. pp. 224.
2. Busarev M.I., Kirpichnikov A.P., Flaks D.B. Vestnik Kazanskogo texnologicheskogo universiteta. 2011. № 22. pp. 155-161.
3. Radchenko T.A., Dy`levskij A.V. Metody` analiza sistem massovogo obsluzhivaniya [Methods of analysis of queuing systems]. Voronezh: Izd-vo Voronezhskogo gos. un-ta, 2011. pp. 75.
4. Yuzhakov A.A. Prikladnaya teoriya sistem massovogo obsluzhivaniya [Applied theory of queuing systems]. Perm`: Izd-vo SPBGU ITMO, 2004. pp. 121.
5. Evdonin G.A., Popova E.N., Tagil`ceva E.I. Upralencheskoe konsultirovanie. 2013. №1 (49). pp. 109-114.
6. Pankratov A.A., Anisimova G.B. S Inzhenernyj vestnik Dona, 2018, №4. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n4y2018/5407/.
7. Titovcev A.S., Tomilova M.N. Nauchno-texnicheskij vestnik Povolzh`ya. 2021. № 10. pp. 109-112.
8. Titovcev A.S., Tomilova M.N. Nauchno-texnicheskij vestnik Povolzh`ya. 2021. № 10. pp. 113-116.
9. Czar`kova E. G. Inzhenernyj vestnik Dona, 2022, №5. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n5y2022/7638/.
10. Akhmetshin D.A. Nauchno-texnicheskij vestnik Povolzh`ya. 2023, t.12, pp. 27-30
11. Kirpichnikov A., Titovtsev A., Yakimov I. Communications in Computer and Information Science. 2018. T. 912. pp. 225-235.



12. Nazarov A., Kvach A., Sztrik J. Communications in Computer and Information Science. 2017. Vol.800. pp. 97-110.

Дата поступления: 25.10.2024

Дата публикации: 9.12.2024