

## К определению критической нагрузки на однопролетную двухэтажную шарнирно опертую раму

*А.Д. Ловцов, И.Е. Мишакин, Ю.А. Пак*

*Тихоокеанский государственный университет, Хабаровск*

**Аннотация:** Рассматривается расчет на устойчивость однопролетной двухэтажной шарнирно опертой рамы. Введено понятие  $\rho$ -подобных рам, как рам с одинаковым отношением  $\rho$  погонных жесткостей ригеля и стойки. Показано, что параметр  $\nu_{cr}$ , определяющий критическую нагрузку на раму, одинаков для  $\rho$ -подобных рам. Для практически важных случаев получены приближенные формулы, позволяющие определить критический параметр нагрузки  $\nu_{cr}$  и расчетные длины сжатых стержней с погрешностью не более 5%.

**Ключевые слова:** плоская рама, потеря устойчивости, критическая сила, расчетные длины, уравнение устойчивости,  $\rho$ -подобные рамы, аппроксимация, метод наименьших квадратов.

Согласно [1], причиной отказов строительных конструкций являются ошибки проектирования (18 – 51%). Для металлических конструкций наиболее частой (22 – 44%) причиной отказов является потеря устойчивости ее элементов. На этапе эскизного проектирования важно иметь простые способы определения расчетных длин сжатых элементов конструкции [2-5].

В справочниках [6, 7] приведена информация, позволяющая получить расчетную длину сжатого стержня лишь для некоторых типов одноэтажных рам.

В СП 16.13330.2011 «Стальные конструкции» в табл. 31 приведены формулы для определения коэффициентов расчетных длин для рам одноэтажных и многоэтажных. В последнем случае используются понятия «верхний», «средний» и «нижний» этажи. Вопрос об определении расчетных длин стоек двухэтажной рамы, таким образом, остается открытым.

Рассмотрим однопролетную двухэтажную шарнирно опертую раму (рис. 1, а). Отношение изгибных жесткостей ригеля и стойки определим, как  $\alpha = EI_p / EI_c$ . Высота этажа  $h = \beta l$ . Введем погонную жесткость стойки

$i = EI_c/h$ , погонную жесткость ригеля  $i_p = EI_p/l$  и отношение погонных жесткостей ригеля и стойки  $\rho = i_p/i$ , которое, с учетом принятых обозначений, равно  $\rho = \frac{EI_p}{l} \cdot \frac{h}{EI_c} = \frac{\alpha EI_c}{l} \cdot \frac{\beta l}{EI_c} = \alpha\beta$ .

Нагрузка  $F_j = k_j F$  ( $j=1,2,3,4$ ) такова, что  $\sum k_j = 1$ . В этом случае  $F$  можно трактовать как нагрузку на раму.

Определим критическую нагрузку  $F_{cr}$  из расчета на устойчивость по Эйлеру, используя классический метод перемещений [7, 8]. Примем за параметр  $v$ , применяемый при расчете на устойчивость, величину, равную:

$$v = h\sqrt{F/EI_c}.$$

Тогда для сжатых стоек 1, 2, 3, 4 рамы (рис. 1, а)  $v_1 = \sqrt{k_1 + k_3} \cdot v$ ,  $v_2 = \sqrt{k_2 + k_4} \cdot v$ ,  $v_3 = \sqrt{k_3} \cdot v$ ,  $v_4 = \sqrt{k_4} \cdot v$ .

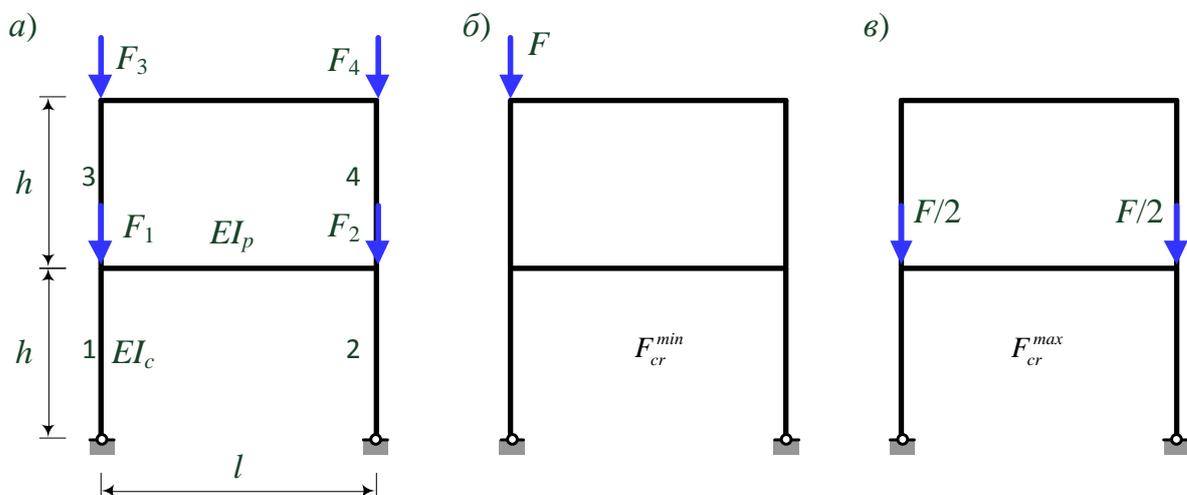


Рис. 1. Рама: а - расчетная схема рамы; б – загрузка, соответствующее минимальной критической силе; в - загрузка, соответствующее максимальной критической силе.

Величина критической нагрузки на раму  $F_{cr}$  зависит от распределения сил  $F_j$  по узлам рамы [9, 10]. Проводя серию расчетов, обнаруживаем, что: минимальное значение  $F_{cr}^{min}$  получается при загрузении левой стойки второго этажа силой  $F$ , т. е., при  $k_1 = k_2 = k_4 = 0$  и  $k_3 = 1$  (рис. 1, б); максимальное значение  $F_{cr}^{max}$  получается при загрузении стоек первого этажа одинаковыми

силами  $F/2$  ( $k_1 = k_2 = 0.5$  и  $k_3 = k_4 = 0$ , рис. 1, в). При этом для  $\rho \geq 0.5$  параметры  $v_{cr}^{min}$  и  $v_{cr}^{max}$ , соответствующие  $F_{cr}^{min}$  и  $F_{cr}^{max}$ , отличаются один от другого не более чем на 5% (табл. 1).

Таблица 1

Максимальные (числитель) и минимальные (знаменатель) значения  $v_{cr}$

$\rho$	$v_{cr}$	%	$\rho$	$v_{cr}$	%	$\rho$	$v_{cr}$	%
0.2	1.464	12.84	0.5	<b>1.767</b>	<b>4.96</b>	2	2.063	1.30
	1.298			<b>1.683</b>			2.036	
0.3	1.606	8.77	0.6	1.818	3.99	4	2.136	1.04
	1.477			1.748			2.114	
0.4	1.699	6.43	1	1.942	2.23	10	2.186	0.93
	1.597			1.900			2.165	

Указанное обстоятельство наводит на мысль получить решение задачи при  $\rho \geq 0.5$  для наиболее опасного нагружения (рис. 1, б) и распространить его результаты, с некоторой погрешностью, на произвольные случаи нагружения.

Уравнение устойчивости представляет собой условие равенства нулю определителя матрицы жесткости  $\mathbf{R}(h, i, \rho, v)$  [7, 8]. Компоненты этой матрицы зависят от известных для рамы величин  $h, i, \rho$  и искомого параметра  $v$ . Ввиду громоздкости получаемых выражений приведем это уравнение в общем виде

$$D(h, i, \rho, v) = |\mathbf{R}(h, i, \rho, v)| = C(h, i) \cdot D(\rho, v) = 0.$$

Здесь:  $C(h, i) \neq 0$  – константа, зависящая от высоты этажа  $h$  и погонной жесткости стойки  $i$ ,  $D(\rho, v)$  – функция, зависящая от отношения погонных жесткостей ригеля и стойки и искомого параметра  $v$ .

Таким образом, уравнение устойчивости, переписанное в виде:

$$D(\rho, v) = 0,$$

задает неявную функцию  $v = v(\rho)$ . Получить выражение для  $v(\rho)$  в аналитическом виде не представляется возможным. Однако можно сделать вывод о том, что критический параметр  $v_{cr}$  зависит только от отношения погонных жесткостей ригеля и стойки. Следовательно, для множества рам с одинаковым отношением  $\rho$  и одинаковым распределением нагрузки (одинаковым набором коэффициентов  $k_j$  ( $j=1,2,3,4$ )) параметр  $v_{cr}$  останется неизменным. Назовем такое множество рам  $\rho$ -подобными рамами. Поэтому результаты, представленные в таблице, справедливы для любой рамы, расчетная схема которой изображена на рис. 1, а.

Поставим задачу построения приближенного выражения для  $v = v(\rho)$ . Проведем серию вычислений  $v_{cr}$  при переменном  $\rho \geq 0.5$  для рамы, показанной на рис. 1, б. Результаты этих вычислений представлены крестиками на рис. 2.

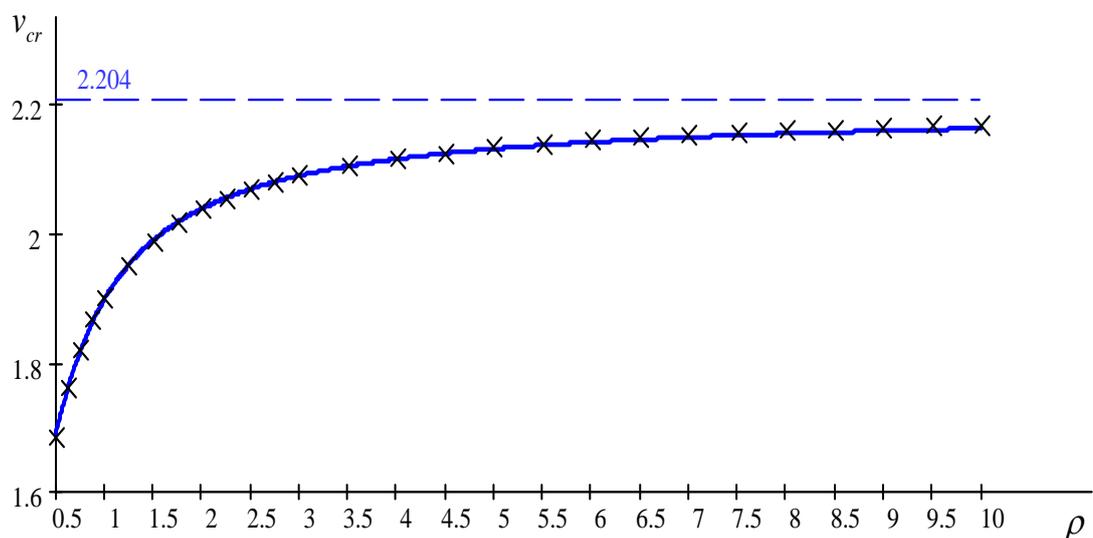


Рис. 2. Аппроксимация результатов численного эксперимента

Указанные результаты с использованием метода наименьших квадратов были аппроксимированы функциями:

$$v_{cr}(\rho) = 1.0962 + 0.6943 \cdot \arctg(2.274\rho) \quad (0.5 \leq \rho \leq 3); \quad (1)$$

$$v_{cr}(\rho) = 1.1572 + 0.6590 \cdot \arctg(2.087\rho) \quad (0.5 \leq \rho \leq 10) \quad (2)$$

(показаны сплошной линией на рис. 2). Для обеих функций максимальная погрешность аппроксимации составила 0.34%.

При  $\rho \rightarrow \infty$  точное значение критического параметра  $v_{cr}$  определяется из уравнения  $\eta_1(v)+1=0$  и равно  $v_{cr} = 2.204$  (здесь  $\eta_1 = \frac{v^3}{3(\operatorname{tg} v - v)}$  [8]).

Построенные функции асимптотически стремятся к этому значению при  $\rho \rightarrow \infty$  (рис. 2, пунктирная линия).

Установим максимальную погрешность определения  $v_{cr}$ .

Для этого:

загрузим раму с  $\rho = 0.5$  по схеме рис. 1, в;

определим точное значение  $v_{cr}^e = 1.766679$ ;

определим приближенное значение  $v_{cr}$  по формулам (1), (2)

$$v_{cr}^{(1)} = 1.68595, \quad v_{cr}^{(2)} = 1.688835;$$

определим погрешность приближенных формул

$$\varepsilon^{(1)} = \frac{v_{cr}^e - v_{cr}^{(1)}}{v_{cr}^e} \cdot 100 = 4.6\%, \quad \varepsilon^{(2)} = \frac{v_{cr}^e - v_{cr}^{(2)}}{v_{cr}^e} \cdot 100 = 4.4\%.$$

Таким образом, при любом нагружении рамы погрешность определения  $v_{cr}$  по полученным формулам (1), (2) составит не более 5%.

Коэффициенты расчетной длины стоек равны

$$\mu_1 = \frac{1}{\sqrt{k_1 + k_3}} \frac{\pi}{v_{cr}}, \quad \mu_2 = \frac{1}{\sqrt{k_2 + k_4}} \frac{\pi}{v_{cr}},$$

$$\mu_3 = \frac{1}{\sqrt{k_3}} \frac{\pi}{v_{cr}}, \quad \mu_4 = \frac{1}{\sqrt{k_4}} \frac{\pi}{v_{cr}}$$

и погрешность их определения также составляет не более 5%.

Отметим, что с использованием полученных значений  $v_{cr}$  критическая нагрузка на раму  $F_{cr} = v_{cr}^2 EI_c / h^2$  определяется «в запас».

### Пример

Рассматривается рама (рис. 3) пролетом 6 м, высотой этажа 3 м и разными вариантами: загрузки; жесткостей ригеля  $I_p$  и стойки  $I_c$ . Момент инерции  $I = 52400 \text{ см}^4$  соответствует двутавру 40К1,  $I = 23910 \text{ см}^4$  – двутавру 30К3,  $I = 96150 \text{ см}^4$  – двутавру 50Ш4.

В табл. 2 в строке, соответствующей  $v_{cr}$ : в числителе приведено точное значение  $v_{cr}$ ; в знаменателе – приближенное значение  $v_{cr}$  (подсчитанное по формуле (1)); правее – разница в процентах между точным и приближенным значениями. Для строк, соответствующих  $\mu_j$  ( $j = \overline{1, 4}$ ) и  $F_{cr}$  – аналогично.

Варианты 1, 2 и 3, 4 приведены для сравнения решений при изменении  $\rho$  и неизменном распределении сил по узлам рамы: изменение  $\rho$  приводит к изменению параметра  $v_{cr}$  и, следовательно, коэффициентов расчетных длин  $\mu_j$  ( $j = \overline{1, 4}$ ) и критической нагрузки на раму. Отметим, что вариант 4 близок к самому неблагоприятному случаю с точки зрения точности приближенного решения.

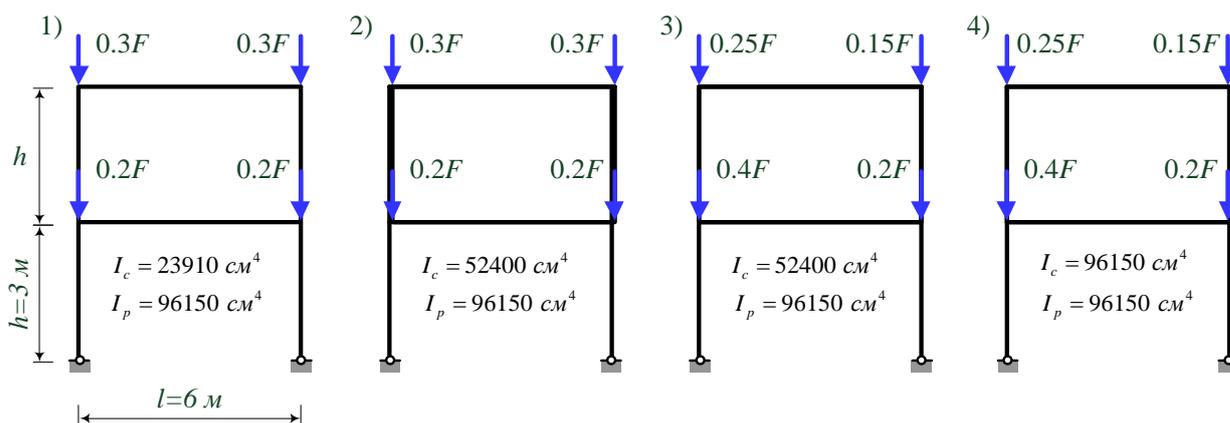


Рис. 3. Варианты расчетных схем

Таблица 2

Сравнение приближенного и точного решений

Вариан- ты расчет- ных схем	Вариант 1		Вариант 2		Вариант 3		Вариант 4	
	$k_1 = k_2 = 0.2,$ $k_3 = k_4 = 0.3,$ $I_c = 23910 \text{ см}^4,$ $I_p = 96150 \text{ см}^4$		$k_1 = k_2 = 0.2,$ $k_3 = k_4 = 0.3,$ $I_c = 52400 \text{ см}^4,$ $I_p = 96150 \text{ см}^4$		$k_1 = 0.4, k_2 = 0.2,$ $k_3 = 0.25, k_4 = 0.15,$ $I_c = 52400 \text{ см}^4,$ $I_p = 96150 \text{ см}^4$		$k_1 = 0.4, k_2 = 0.2,$ $k_3 = 0.25, k_4 = 0.15,$ $I_c = 96150 \text{ см}^4,$ $I_p = 96150 \text{ см}^4$	
$\rho$	2.0107		0.9175		0.9175		0.5	
$v_{cr}$	2.0573	0.97%	1.9030	1.39%	1.9095	1.73%	1.7388	3.04%
	2.0373		1.8765		1.8765		1.6860	
$\mu_1$	2.160	-0.97%	2.335	-1.41%	2.041	-1.76%	2.241	-3.12%
	2.181		2.368		2.077		2.311	
$\mu_2$	2.160	-0.97%	2.335	-1.41%	2.781	-1.76%	3.054	-3.14%
	2.181		2.368		2.830		3.15	
$\mu_3$	2.788	-0.97%	3.014	-1.43	3.290	-1.76%	3.614	-3.13%
	2.815		3.057		3.348		3.727	
$\mu_4$	2.788	-0.97%	3.014	-1.43	4.248	-1.77%	4.665	-3.13%
	2.815		3.057		4.323		4.811	
$F_{cr}$ (кН)	22938	1.93%	43014	2.77%	43309	3.43%	65889	5.98%
	22495		41822		41822		61948	

Варианты 2, 3 приведены для сравнения решений при изменении распределения нагрузки на раму: критическая сила практически не изменилась – разница между точными значениями составила 0.7%; погрешность приближенного решения не превышает 3.43%.

Если для варианта 3 положить  $l = 12 \text{ м}$ ,  $h = 3.273 \text{ м}$ , то отношение погонных жесткостей окажется равным  $\rho = 0.5$ . Параметр  $v_{cr}$  и коэффициенты расчетных длин окажутся такими же, как и в варианте 4. Однако критическая нагрузка на этаж  $F_{cr} = v_{cr}^2 EI_c / h^2$  будет равна: 30183 кН (точное значение) и 28378 кН (приближенное значение).

### Заключение

Для однопролетной двухэтажной шарнирно опертой рамы:

установлено, что параметр  $\nu$ , определяющий критическую нагрузку на раму, одинаков для  $\rho$ -подобных рам – рам с одинаковым отношением  $\rho$  погонных жесткостей ригеля и стойки;

получены приближенные формулы для рам с  $\rho \geq 0.5$ , позволяющие определить критический параметр нагрузки  $\nu_{cr}$  («в запас») и расчетные длины сжатых стержней с погрешностью не более 5%.

показано, что величина критической нагрузки на раму  $F = \sum F_j$  определяется «в запас» и практически не зависит от распределения сил  $F_j$  по узлам рамы с  $\rho \geq 0.5$ .

### Литература

1. Арушонок Ю.Ю. Об ошибках проектирования строительных конструкций // Инженерный вестник Дона, 2021, №11. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n11y2021/7285

2. Лиманцев А.А. Универсальные формулы для определения расчетной длины элементов крестовой решетки // Инженерный вестник Дона, 2021, №5. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n5y2021/6951

3. Журавлев Д.А. Упругая устойчивость статически неопределимой стержневой конструкции многоугольной конфигурации // Инженерный вестник Дона, 2019, №1. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n1y2019/5564

4. Aghayere A., Vigil J. Structural steel design: a practice-oriented approach. Prentice Hall, 2009. P. 692.

5. Sukhvarsh J. Structural stability theory and practice: buckling of columns, beams, plates, and shells. Hoboken: Wiley, 2021. P. 642.

6. Металлические конструкции. В 3 т. Т. 2. Стальные конструкции зданий и сооружений. (Справочник проектировщика) / Под общ. ред. заслуж. строителя РФ, лауреата госуд. премии СССР В. В. Кузнецова

(ЦНИИПроектстальконструкция им. Н. П. Мельникова) – М.: изд-во АСВ, 1998. – 512 с.

7. Прочность, устойчивость, колебания. Справочник в трех томах. Том 3. Под ред. д-ра техн. наук И. А. Биргера и чл.-кор. АН Латвийской ССР Я. Г. Пановко. М.: Машиностроение, 1968. 569 с.

8. Смирнов А.Ф. и др. Строительная механика. Динамика и устойчивость сооружений. М.: Стройиздат, 1984. 415 с.

9. Дворников В. А., Ловцов А. Д., Чернобров Е. О. Влияние схемы загрузки на величину критической силы для многопролетной многоэтажной плоской рамы / Дальний Восток: проблемы развития архитектурно-строительного и дорожно-транспортного комплекса: материалы Международной научно-практической конференции. – Хабаровск : Изд-во Тихоокеан. гос. ун-та, 2015. – Вып. 15. – С. 345 –347

10. Дворников В. А., Ловцов А. Д., Чернобров Е. О. Влияние схемы загрузки на расчетные длины стержней многопролетной многоэтажной рамы / Дальний Восток: проблемы развития архитектурно-строительного и дорожно-транспортного комплекса: материалы Международной научно-практической конференции. – Хабаровск: Изд-во Тихоокеан. гос. ун-та, 2016. – Вып. 16. – С. 460 – 462

### References

1. Arushonok YU. YU. Inzhenernyj vestnik Dona. 2021. №11. URL:ivdon.ru/ru/magazine/archive/n11y2021/7285.
2. Limancev A. A. Inzhenernyj vestnik Dona. 2021. №5. URL:ivdon.ru/ru/magazine/archive/n5y2021/6951.
3. Zhuravlev D.A. Inzhenernyj vestnik Dona. 2019. №1. URL:ivdon.ru/ru/magazine/archive/n1y2019/5564.
4. Aghayere A., Vigil J. Structural steel design: a practice-oriented approach. Prentice Hall, 2009. p. 692.

5. Sukhvarsh J. Structural stability theory and practice: buckling of columns, beams, plates, and shells. Hoboken: Wiley, 2021. p. 642.
6. Metallicheskie konstrukcii. V 3 t. T. 2. Stal'nye konstrukcii zdaniy i sooruzhenij. (Spravochnik proektirovshchika). [Metal structures. In 3 vol. T. 2. Steel Structures of Buildings and Structures. (The Designer's Handbook)]M.: izd-vo ASV, 1998. p. 512.
7. Prochnost', ustojchivost', kolebaniya. [Strength, stability, vibrations] Spravochni k v trekh tomah. Tom 3. Pod red. d-ra tekhn. nauk I. A. Birgera i chl.-kor. AN Latvijskoj SSR YA. G. Panovko. M.: Mashinostroenie, 1968. p. 569.
8. Smirnov A.F. i dr. Stroitel'naya mekhanika. Dinamika i ustojchivost' sooruzhenij. [Structural Mechanics. Dynamics and Stability of Structures] M.: Strojizdat, 1984. p. 415.
9. Dvornikov V. A., Lovcov A. D., Chernobrov E. O. Dal'nij Vostok: problemy razvitiya arhitekturno-stroitel'nogo i dorozhno-transportnogo kompleksa: materialy Mezhdunarodnoj nauchno-prakticheskoy konferencii. (Influence of the loading scheme on the critical force value for a multi-span multi-storey flat frame). Khabarovsk, 2015, Release. 15. pp. 345–347.
10. Dvornikov V. A., Lovcov A. D., Chernobrov E. O. Dal'nij Vostok: problemy razvitiya arhitekturno-stroitel'nogo i dorozhno-transportnogo kompleksa: materialy Mezhdunarodnoj nauchno-prakticheskoy konferencii. (Influence of the loading scheme on the design lengths of the bars of a multi-span multi-storey frame). Khabarovsk, 2016, Release. 16. pp. 460–462.