

Ле В. Зыонг

Конечноэлементный анализ применимости прикладных теорий расчета пьезоэлектрического устройства накопления энергии стековой конфигурации

Введение

Пьезоэлектрические устройства накопления энергии являются альтернативным источником энергии, которые позволяют собирать энергию от маломощных источников в окружающей среде, например, вибрация от качающихся мостов, движущихся механизмов и т.д. Устройства накопления энергии, в частности, пьезоэлектрические широко изучаются в различных областях техники от аэрокосмической области до бытовых устройств и этим обусловлен интерес их исследования [1 - 11].

В последнее время были изучены различные подходы к моделированию пьезоэлектрических устройств накопления энергии. Большинство моделей были созданы на основе системы с одной степенью свободы – «пружина с инерционной массой». Работы [1 - 5] посвящены построению моделей ПЭГ на основе колебаний механической системы с сосредоточенными параметрами. Использование таких систем является удобным модельным подходом, так как позволяет получить аналитические зависимости между выходными параметрами ПЭГ (потенциалом, мощностью и т.п.) и электрическими, механическими характеристиками и сопротивлением внешней электрической цепи. Задача формулируется в виде системы обыкновенных дифференциальных уравнений состоящих из уравнения движения с учетом пьезоэлектрического эффекта [2 - 4]. В работе [5] на основе этих моделей проведен учет случайных колебаний ПЭГ. В работе [6] использован метод Релея-Ритца на основе разложения по собственным формам колебаний. В работе [7] построено решение в аналитической форме для одномерной модели устройства. В работе [8] разработана

модифицированная модель [6] для определения оптимальных параметров ПЭГ. В работе [9] исследование тонкой биморфной пьезопластины проводится в рамках приближенной теории на основе уравнений Тимошенко. В работе [10] исследуется вопрос оптимизации конструкции изгибного ПЭГ в зависимости от условий крепления. Одним из средств улучшения характеристик ПЭГ является использование пьезокомпозиционных материалов, так в работе [11] представлены результаты вычислительных экспериментов по определению характеристик пористой пьезокерамики по методологии, включающей метод эффективных модулей.

В настоящей работе изучаются области применимости этих упрощенных моделей на основе строгих трехмерных математических постановок для упругих и электроупругих сред и анализа их конечноэлементных аналогов в пакете ANSYS.

1. Приближенная и точная постановка задачи

В работе рассматривается ПЭГ являющийся главным элементом устройства накопления энергии, имеющий стековую конструкцию, где активный элемент состоит из одного (рис. 1а, 1б) или нескольких слоев пьезокерамики (рис. 1в), поляризованных по толщине в форме короткого цилиндра и переходных упругих слоев такого же радиуса. Верхняя и нижняя торцевые поверхности пьезодиска полностью электродированы. Весь пакет заключен в цилиндрический корпус, жестко закрепленный по нижнему основанию. Рассматриваемое устройство включается в электрическую цепь с активным сопротивлением R_H (рис. 1а).

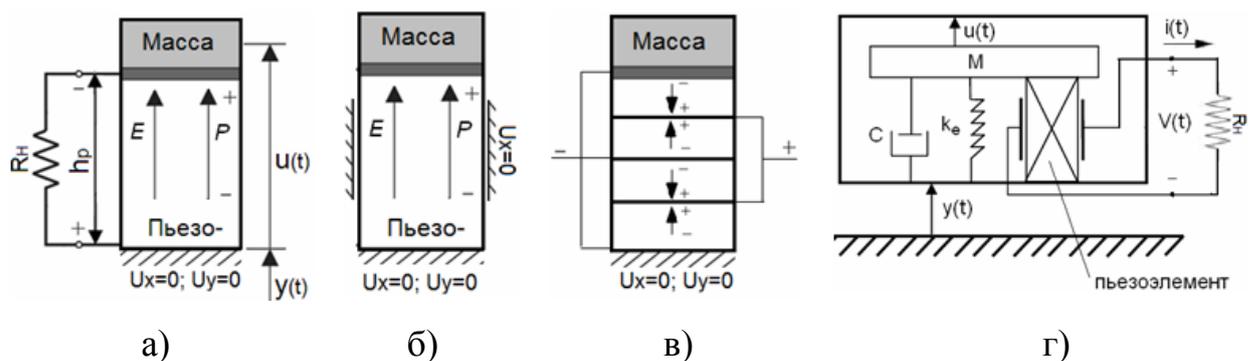


Рис. 1. Модель ПЭГ стекowej конфигурации. а) свободная боковая поверхность (первая модель); б) условия гладкого контакта (вторая модель); в) модель с несколькими слоями пьезокерамики; г) эквивалентная модель с сосредоточенными параметрами.

Рассматривается ПЭГ для двух моделей с различными механическими условиями на боковой поверхности. В первой модели (рис. 1а) только нижняя поверхность пьезоэлемента закреплена в подвижной системе и совершает вертикальные колебания вместе с ней, во второй цилиндрическая поверхность пьезоэлемента закреплена по радиальному направлению – условия гладкого контакта (рис. 1б).

При этом задается $y(t)$ - вертикальное перемещение нижней поверхности ПЭГ:

$$y(t) = y_0 e^{-i(2\pi f)t} \quad (1)$$

где y_0 – амплитудное колебание ($y_0 = 0,1$ мм), f – частота вынужденных колебаний в Гц.

В конструкции использовались следующие материалы: пьезоэлемент – пьезокерамика PZT-5Н; инерционный элемент – сталь. Значения электроупругих модулей керамики PZT-5Н приведены в таблице 1.

Таблица № 1

Материальные константы пьезокерамики PZT-5Н:

C_{11}^E (ГПа)	C_{12}^E (ГПа)	C_{13}^E (ГПа)	C_{33}^E (ГПа)	C_{44}^E (ГПа)	e_{31} (Кл/м ²)	e_{33} (Кл/м ²)	e_{15} (Кл/м ²)	$\varepsilon_{11} / \varepsilon_0$	$\varepsilon_{33} / \varepsilon_0$
126	55	53	117	35.3	-6.5	23.3	17	1710	1470

$\varepsilon_0 = 8,85 \times 10^{-12}$ Ф/м; плотность $\rho = 7,5 \times 10^3$ кг/м³; $\xi = 0,05$ - коэффициент демпфирования.

Упругие свойства изотропных материалов задаются с помощью модуля Юнга E и коэффициента Пуассона ν . Характеристики конструкционных материалов – сталь: плотность $\rho = 7,8 \times 10^3$ кг/м³; модуль Юнга $E = 2,1 \times 10^{11}$ Па; коэффициент Пуассона $\nu = 0,3$.

Эквивалентная механическая модель. Для ПЭГ стекловой конфигурации, работающего на частоте близкой к собственной, эквивалентная модель с одной степенью свободы (рис. 1г) может быть построена на основе сочетания уравнений актуатора и датчика, полученного для электромеханически-связанных систем [1]:

$$\begin{cases} M \cdot \ddot{u}(t) + C \dot{u}(t) + K u(t) - \theta \cdot v(t) = -M \cdot \ddot{y}(t) \\ \theta \cdot \dot{u}(t) + C_p \cdot \dot{V}_p(t) + \frac{1}{R_H} V_p(t) = 0 \end{cases} \quad (2)$$

Из уравнений (2) можно определить значение выходного потенциала V_p по формуле [1]:

$$\left| \frac{V_p}{M \ddot{y}} \right| = \frac{1}{|\theta|} \frac{\alpha k_e^2 \Omega}{\sqrt{[1 - (1 + 2\xi\alpha)\Omega^2]^2 + [(2\xi + (1 + k_e^2)\alpha)\Omega - \alpha\Omega^3]^2}} \quad (3)$$

ПЭГ характеризуется двумя собственными частотами: резонансная частота f_n соответствует коэффициенту демпфирования $\xi = 0$, сопротивлению активной нагрузки $R_H \rightarrow 0$ (короткое замыкание) и антирезонансная частота f_{an} - $\xi = 0$, $R_H \rightarrow \infty$ (разомкнутой цепи). Значения f_n и f_{an} можно выразить в виде [1]:

$$f_n = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{K}{M}}, \text{ и } f_{an} = \sqrt{1 + k_e^2} \cdot f_n, \quad (4)$$

$$\Omega = \frac{f}{f_n}, \quad \alpha = 2\pi f_n C_p R_H, \quad \xi = \frac{c}{2M(2\pi f_n)}; \quad K = \frac{c_{33}^E S_p}{h_p}, \quad \theta = -\frac{e_{33} S_p}{h_p} \quad (5)$$

где v – напряжение; C - коэффициент эффективного демпфирования; C_p - эффективная емкость. Ω - отношение частота; α – безразмерные постоянные времени; k_e – жесткость пьезоэлектрического слоя, когда система находится в состоянии короткого замыкания; θ - силовой коэффициент; K - эффективная жесткость; S_p - площадь поверхности пьезоэлемента; h_p - высоты пьезоэлемента; и M – эффективная масса, можно записать в виде [1]

$$M = M_m + \frac{M_p}{n}, \quad (6)$$

M_m – масса инерционная; M_p – масса пьезоэлемента; n – коэффициент приближенной эффективной массы (в [1] принято, что коэффициент $n = 3$).

Основной целью работы является исследования области применимости одномерной модели (2) - (6) с помощью ее сравнения с конечноэлементным расчетом в программных пакетах ACELAN и ANSYS.

Континуальные постановки задач электроупругости. Стековое пьезоэлектрическое устройство накопления энергии (рис. 1а, 1б) представляет собой составное упругое и электроупругое тело, которое совершает малые колебания в подвижной системе координат. Прямолинейное вертикальное движение этой системы (рис. 1) задается законом $y(t)$, в соответствии с которыми движется основание устройства. В этих условия достаточно адекватной математической моделью функционирования устройства является начально-краевая задача линейной теории электроупругости [12].

Рассмотрим некоторый пьезопреобразователь Ω , представленный набором областей $\Omega_j = \Omega_{pk}; k = 1, 2, \dots, N_p; j = k$ со свойствами пьезоэлектрических материалов и набором областей $\Omega_j = \Omega_{em}; m = 1, 2, \dots, N_e; j = N_p + m$ со свойствами упругих материалов. Будем считать, что физико-механические процессы, происходящие в средах Ω_{pk} и Ω_{em} , можно адекватно описать в рамках теорий пьезоэлектричества (электроупругости) и упругости.

Для пьезоэлектрических сред $\Omega_j = \Omega_{pk}$ предположим, что выполняются следующие полевые уравнения и определяющие соотношения:

$$\rho_{pk} \mathbf{u} + \alpha_{dj} \rho_j \mathbf{u} - \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{f}_j; \quad \nabla \cdot \mathbf{D} = 0, \quad (7)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{c}_j^E \cdot (\boldsymbol{\varepsilon} + \beta_{dj} \boldsymbol{\xi}) - \mathbf{e}_j^T \cdot \mathbf{E}; \quad \mathbf{D} + \zeta_d \mathbf{D} = \mathbf{e}_j \cdot (\boldsymbol{\varepsilon} + \zeta_d \boldsymbol{\xi}) + \boldsymbol{\varepsilon}_j^S \cdot \mathbf{E}, \quad (8)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T) / 2; \quad \mathbf{E} = -\nabla \varphi, \quad (9)$$

где $\rho(x)$ – плотность материала; $\mathbf{u}(x, t)$ – вектор-функция перемещений; $\boldsymbol{\sigma}$ – тензор механических напряжений; \mathbf{f} – вектор плотности массовых сил; \mathbf{D} – трехмерный вектор индукции электрического поля; \mathbf{c}_j^E – тензор четвертого

ранга упругих модулей, измеренных при постоянном электрическом поле; \mathbf{e}_j – тензор пьезомодулей третьего ранга; $\boldsymbol{\varepsilon}$ – тензор деформаций; \mathbf{E} – трехмерный вектор напряженности электрического поля; $\varphi(x,t)$ – функция электрического потенциала; $\boldsymbol{\varepsilon}_j^S$ – тензор второго ранга диэлектрических проницаемостей, измеренных при постоянной деформации; $\alpha_{dj}, \beta_{dj}, \zeta_d$ – неотрицательные коэффициенты демпфирования [12], а остальные обозначения стандартны для теории электроупругости, за исключением дополнительного индекса "j", указывающего на принадлежность к среде Ω_j с номером j.

Для сред $\Omega_j = \Omega_{em}$ с чисто упругими свойствами будем учитывать только механические поля, для которых примем аналогичные (7) - (9) полевые уравнения и определяющие соотношения в пренебрежении электрическими полями и эффектами пьезоэлектрической связности.

К уравнениям (7) - (9) добавляются механические и электрические граничные условия, а также начальные условия в случае нестационарной задачи, среди которых отметим условие на электроде S_e связанным с электрической цепью устройства накопления энергии.

$$\int_{S_e} D_n ds = I, \quad (10)$$

где I - ток в цепи, который в случае свободного электрода равен нулю. В работе рассматриваются случаи подключения к электрической цепи с активным сопротивлением.

2. Численные расчеты

Как оказалось значение коэффициента приближенной эффективной массы n зависит от геометрических параметров конструкции и граничных условий. В настоящей работе изучено влияние значения высоты пьезоэлемента h_p , массы инерционной M_m и площади поверхности пьезоэлемента S_p на этот коэффициент для двух моделей в случае свободного электрода.

В начале рассматривается влияние высоты пьезоэлемента h_p , инерционной массы M_m , и площади поверхности электрода S_p на первую резонансную частоту f_n для двух моделей (расчеты проводились в ANSYS). Полученные зависимости резонансных частот от высоты пьезоэлемента h_p , изменяющейся в интервале $1 \div 20$ мм приведены на рис. 2.

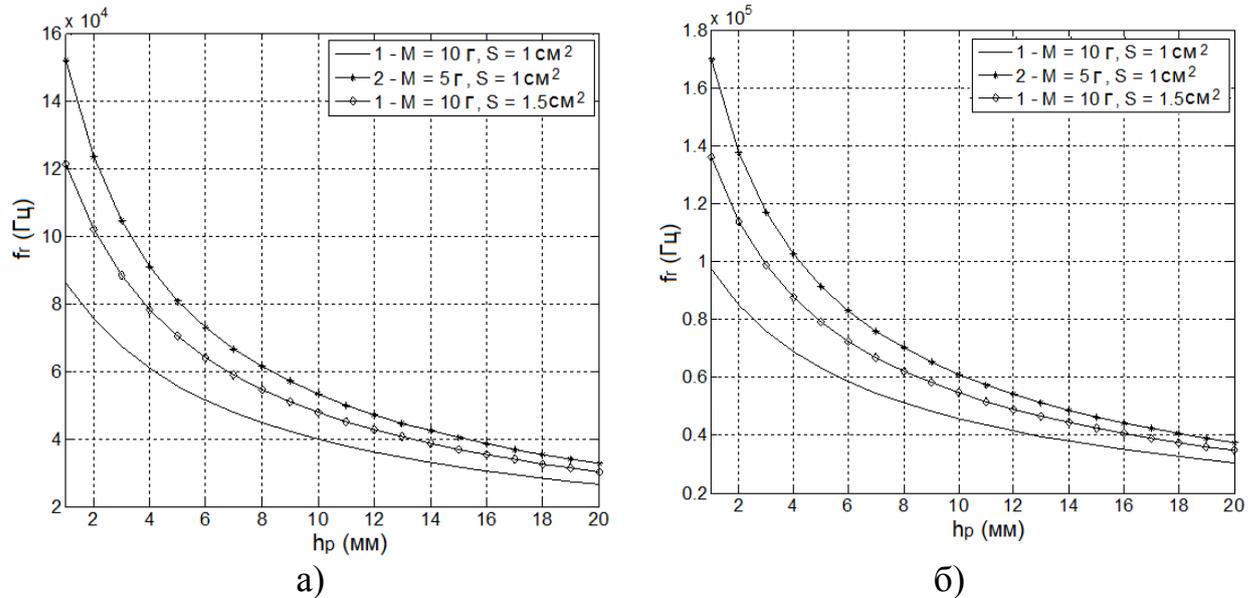
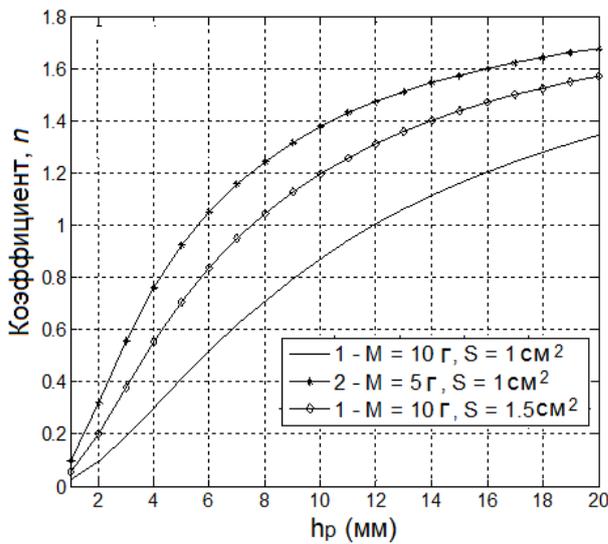


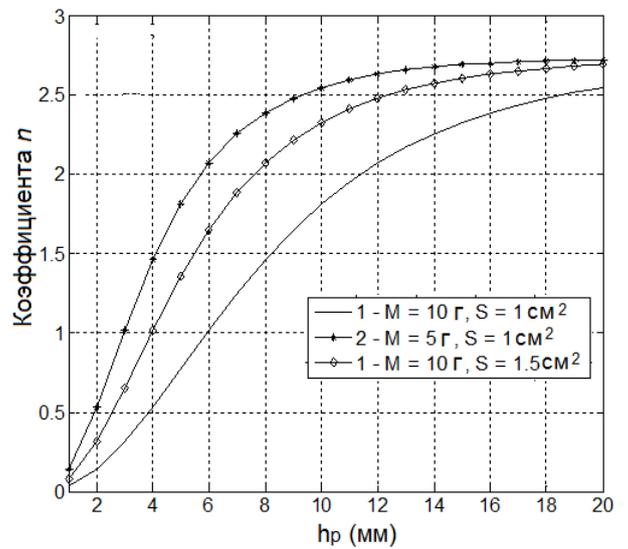
Рис. 2. а) - первая модель; б) - вторая модель.

Далее рассматривается зависимость значения коэффициента n , входящего в формулу (6), от значения высоты пьезоэлемента h_p , инерционной массы M_m и площади поверхности электрода S_p .

Значение коэффициента n находится из условия совпадения частот резонанса, вычисленных по соотношениям (4) и, рассчитанных с помощью конечноэлементной модели в пакете ANSYS (рис. 2). Полученные зависимости значения коэффициента приближенной эффективной массы n от высоты пьезоэлемента h_p , инерционной массы M_m , и площади поверхности электрода S_p для двух моделей представлены на рис. 3.



а)



б)

Рис. 3. а) - первая модель; б) - вторая модель.

Из рис. 3 видно, что для обеих моделей значение коэффициента n возрастает с ростом высоты пьезоэлемента h_p , и площади поверхности электрода S_p , но убывает с ростом инерционной массы M_m . Значение коэффициента n для первой модели меньше, чем для второй модели.

В итоге можно заключить, что значение коэффициента n не равно фиксированному значению 3 (как заявили авторы в [1]). Значение коэффициента n изменяется и зависит от геометрических параметров конструкции. Для второй модели, при значении $S_p = 1 \text{ см}^2$ (это значение было использовано в статье [1]), значение коэффициента n возрастает с ростом высоты пьезоэлемента h_p , и принимает значение 2,7218 (≈ 3) при высоте $h_p = 20$ мм. Таким образом, при использовании метода моделирования на основе систем с сосредоточенными параметрами нужно иметь в виду, что значение коэффициента n зависит от параметров устройства. Результаты, представленные на рис. 3 позволяют в зависимости от высоты пьезоэлемента h_p , инерционной массы M_m , и площади S_p выбрать значение коэффициента n .

3. Сравнение выходного потенциала

В работе рассматривается выходное напряжение ПЭГ для второй модели в зависимости от частот вынужденных колебаний, изменяющихся в интервале $10 \div 80$ кГц.

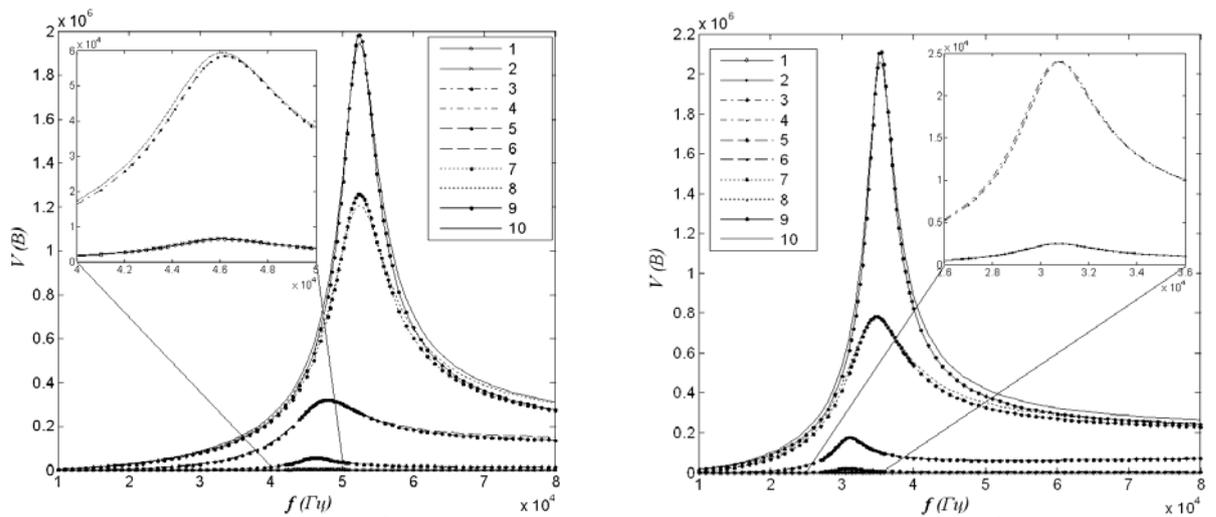
В начале сравнится выходное напряжение V_1 , вычисленное по соотношениям (3) и V_2 , рассчитанное с помощью конечноэлементной модели, т.е. изучается влияние геометрических параметров устройства на значения коэффициентов n и $\lambda = V_2/V_1$. Полученные результаты показывают, что значения коэффициента n и λ изменяются в зависимости от геометрических параметров устройства и величины активного сопротивления R_H .

Так, при значении инерционной массы $M_m = 10$ г, площади поверхности электроде $S_p = 1 \text{ см}^2$, полученные значения коэффициента n и λ в зависимости от значений высоты пьезоэлемент h_p , и активной сопротивлению R_H представлены в таб. 2.

Таблица № 2

		Значения коэффициента n и λ					
		R_H	0,1 кОм	1 кОм	10 кОм	0,1 МОм	1 МОм
$h_p = 10$ мм	n		1,81	1,81	1,81	1,61	1,61
	λ		1	1	1	1,02	1,02
$h_p = 20$ мм	n		2,73	2,73	2,73	2,68	2,68
	λ		1,12	1,12	1,12	1,18	1,18

Результаты, представленные в таб. 2, показывают, что значение коэффициента n равно значению, рассчитанному выше (рис. 3) при не большом активном сопротивлении R_H . При этом полученные зависимости выходного потенциала от частот вынужденных колебаний представлены на рис. 4а и 4б для значения высоты пьезоэлемента $h_p = 10$ мм и $h_p = 20$ мм соответственно. Значения коэффициентов n и λ соответствуют таб. 2. При этом кривые 1, 2 соответствуют $R_H = 100$ Ом; кривые 3, 4 – $R_H = 1$ кОм; кривые 5, 6 – $R_H = 10$ кОм; кривые 7, 8 – $R_H = 0,1$ МОм; кривые 9, 10 – $R_H = 1$ МОм;



а) - $M_m = 10$ г, $S_p = 1$ см², $h_p = 10$ мм б) - $M_m = 10$ г, $S_p = 1$ см², $h_p = 20$ мм

Рис. 4. Кривые 1,3,5,7,9 соответствуют расчетам по формулам (3); кривые 2,4,6,8,10 - расчетам в ANSYS.

Сравнение результатов расчетов при установленных параметрах модели (коэффициенты n и λ) показывает достаточно хорошее их совпадение, особенно в области частот, близких к резонансной частоте.

Далее рассматривается выходное напряжение V в случаях, когда пьезоэлемент состоит из одного или двух, и четырех слоев пьезокерамики (рис. 1в). В том случае, когда устройство включено в электрическую цепь с активным сопротивлением $R_H = 1$ кОм. Значения $h_p = 20$ мм, $M_m = 10$ г и $S_p = 1$ см². Полученные зависимости выходного потенциала от частот вынужденных колебаний представлены на рис. 5.

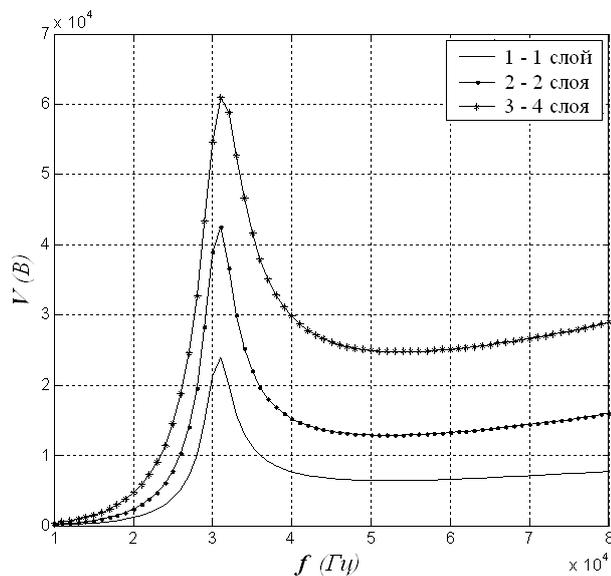


Рис. 5. – Зависимость электрического потенциала от вибрационной частоты.

Из рис. 5 видно, что значение электрического потенциала возрастает с ростом числа пьезоэлектрических слоев.

Выводы

Из приведенных выше результатов можно сделать следующий вывод, что при использовании метода моделирования систем с сосредоточенными параметрами, настройка каждой модели зависит от геометрических характеристик и конструкций модели. Метод исследования, который построен на модели с сосредоточенными параметрами дает первоначальное понимание проблемы, это приближение ограничивается одиночным режимом вибраций и в нем отсутствуют некоторые важные аспекты, связанные с формами колебаний и точным распределением деформаций, которые оказывают влияние на электрический отклик. В работе изучены области применимости модели на основе сосредоточенных параметров с одной механической степенью свободы с помощью ее сравнения с конечно-элементным расчетом в пакетах ACELAN и ANSYS. Исследование показало влияние структурных параметров на электрический отклик и необходимость учета этого обстоятельства при использовании упрощенных моделей. Проведенные расчеты результаты, которых представлены в виде графиков и таблиц позволяют выбрать рациональные коэффициенты приближенной эффективной массы n , для их использования в одномерных моделях.

Литература:

1. DuToit N.E., Wardle B.L. Experimental verification of models for microfabricated piezoelectric vibration energy harvesters [Text] // AIAA J, 2007. – Vol.45. – pp.1126-1137.
2. Roundy S., Wright P.K. A piezoelectric vibration based generator for wireless electronics [Text] // Smart Materials and Structures, 2004. – Vol.13. – pp.1131-1144.

3. DuToit N.E., Wardle B.L., Kim S. Design considerations for MEMS-scale piezoelectric mechanical vibration energy harvesters [Text] // Journal of Integrated Ferroelectrics, 2005. Vol.71. – pp.121-160.

4. Standards Committee of the IEEE Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control Society “IEEE Standard on Piezoelectricity”, IEEE, New York, 1987. – pp.1-66.

5. Adhikari S., Friswell M.I., Inman D.J. Piezoelectric energy harvesting from broadband random vibrations [Text] // Smart Materials and Structures, 2009. – Vol.18. – 115005 (pp.1-7).

6. Sodano H.A., Park G., Inman D.J. Estimation of Electric Charge Output for Piezoelectric Energy Harvesting [Text] // Journal of Strain, 2004. – Vol.40. – pp.49-58.

7. Erturk A., Inman D.J. Analytical Modeling of Cantilevered Piezoelectric Energy Harvesters for Transverse and Longitudinal Base Motions // In: Proceeding of the 49th AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference, Schaumburg, IL, 7 -10 April 2008, Schaumburg, IL.

8. Liao Y., Sodano A.H. Model of a Single Mode Energy Harvester and Properties for Optimal Power Generation [Text] // Smart Materials and Structures, 2008. – Vol.17. – 065026 (14pp), ISSN 0964-1726

9. Шляхин Д. А. Вынужденные осесимметричные колебания тонкой круглой биморфной пластины ступенчато переменной толщины и жесткости [Электронный ресурс] // «Инженерный вестник Дона», 2013, №1. – Режим доступа: <http://ivdon.ru/magazine/archive/n1y2013/1516> (доступ свободный) – Загл. с экрана. – Яз. рус.

10. Мартыненко А.В. Исследование параметров осесимметричного изгибного пьезоэлектрического преобразователя при различных граничных условиях [Электронный ресурс] // «Инженерный вестник Дона», 2010, №3. – Режим доступа: <http://ivdon.ru/magazine/archive/n3y2010/206> (доступ свободный) – Загл. с экрана. – Яз. рус.

11.Наседкин А.В., Шевцова М.С. Сравнительный анализ результатов моделирования пористой пьезокерамики методами эффективных модулей и конечных элементов с экспериментальными данными [Электронный ресурс] // «Инженерный вестник Дона», 2013, №2. – Режим доступа: <http://www.ivdon.ru/magazine/archive/n2y2013/1615> (доступ свободный) – Загл. с экрана. – Яз. рус.

12.Белоконь А.В., Наседкин А.В., Соловьев А.Н. Новые схемы конечно-элементного динамического анализа пьезоэлектрических устройств [Текст] // Прикладная математика и механика, 2002. – №.3. – С.491-501.