
Устойчивость режима горизонтального полета в задаче Жуковского с постоянной силой тяги

Д.В. Беляков

Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), г. Москва

Аннотация: В работе рассматривается плоское движение тяжелой материальной точки в квазистатической среде под действием сил гравитации, аэродинамических сил и силы тяги. Эту задачу можно рассматривать как продолжение задачи Жуковского о моделировании продольного полета летательного аппарата в предположении, что угол атаки является постоянным, с учетом воздействия силы тяги. Получены уравнения движения в разных системах координат. Найдены стационарные режимы полета. Исследуется устойчивость самых основных режимов. Найдено численное решение уравнений движения и исследуется поведение траекторий на различных режимах полета.

Ключевые слова: Сила тяги, материальная точка, задача Жуковского.

Создатель аэродинамической теории Жуковский Н. Е. написал достаточно много работ в области механики твердого тела, и они послужили для других исследователей основанием для развития всех этих задач. Среди его трудов самый большой интерес заслуживают работы по динамике летательных аппаратов. Одной из первых публикаций в этой области был доклад [1] «О парении птиц». В нем были указаны методы для расчета траекторий полета птиц в различных условиях. Жуковский Н. Е., в отличие от своих великих предшественников Ньютона и Галилея, смог качественно и количественно описать аэродинамические силы, ввести понятие центра давления, создать методы расчета профилей крыла, создать вихревую теорию для расчета формы винтов, и многое-многое другое. Все это послужило фундаментом для развития авиации. В работе [2] было проведено обобщение и развитие некоторых задачи, сформулированных Н. Е. Жуковским. В учебнике [3] сформулирована задача о планирующем полете и приведены уравнения

движения. В настоящей работе рассматривается задача Жуковского с силой тяги, получены различные стационарные режимы и исследуется устойчивость горизонтального полета.

Постановка задачи.

Рассмотрим плоское криволинейное движение точки в гравитационном поле в вертикальной плоскости под действием аэродинамических сил сопротивления и подъемной силы и силы тяги. Пусть к точке присоединена невесомая симметричная оболочка. Пусть существует такая ориентация выбранной оси и вектора скорости V , что угол атаки остается постоянным.

Будем считать, что высота полета невелика и плотность среды остается постоянной. Также будем считать, что масса точки M не меняется.

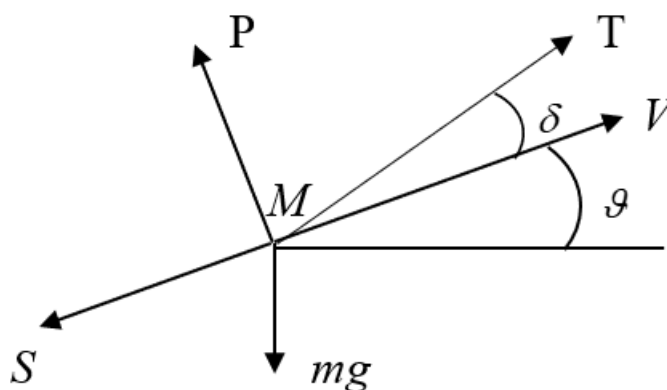


Рис. 1. Движение точки под действием внешних сил

Выберем подвижную систему координат, связанную с вектором скорости. Положение точки относительно первоначальной неподвижной системы координат определим ее координатами x и y . Угол отклонения вектора скорости от горизонтали обозначим ϑ . Опишем внешние силы, действующие на рассматриваемую модель движения. Сила сопротивления направлена против вектора абсолютной скорости материальной точки M . Подъемная сила,

направлена ортогонально вектору скорости V и в данном случае направлена влево. Зависимость аэродинамических сил от скорости носит квадратичный характер. Будем считать, что сила тяги T постоянна и составляет угол δ с направлением вектора скорости. Проекция силы тяжести как обычно входит в уравнения движения. Уравнения движения в выбранной системе координат имеют вид:

$$\begin{aligned} m\dot{V} &= -mg \sin \vartheta - \frac{1}{2} \rho \sigma c_x V^2 + T \cos \delta \\ mV\dot{\vartheta} &= -mg \cos \vartheta + \frac{1}{2} \rho \sigma c_y V^2 + T \sin \delta \\ \dot{x} &= V \cos \vartheta \\ \dot{y} &= V \sin \vartheta \end{aligned} \quad (1)$$

Составим другую систему уравнений в осях Кенига. Зададим проекции V_x, V_y ее абсолютной скорости на вертикальное и горизонтальное направление.

Тогда уравнения движения в осях Кенига будут выглядеть так:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= V_x \\ \dot{y} &= V_y \\ m\dot{V}_x &= -\frac{1}{2} \rho \sigma c_x V_x \sqrt{V_x^2 + V_y^2} - \frac{1}{2} \rho \sigma c_y V_x \sqrt{V_x^2 + V_y^2} \\ m\dot{V}_y &= -\frac{1}{2} \rho \sigma c_x V_y \sqrt{V_x^2 + V_y^2} + \frac{1}{2} \rho \sigma c_y V_y \sqrt{V_x^2 + V_y^2} - mg \end{aligned} \quad (2)$$

Обе системы уравнений, полностью описывают движение рассматриваемой точки. Эту модель можно рассматривать как простейшую модель, описывающую движение ЛА. Аналогичные, но более сложные модели рассматривались в работах [4-6].

Переход к безразмерным переменным

Введем новые безразмерные переменные v, τ

$V = V_1 v$ - безразмерная скорость, $t = \frac{V_1}{g} \tau$ - безразмерное время,

$T' = \frac{T}{mg}$ безразмерная сила тяги, $k_1 = \frac{mg}{0.5\rho\sigma c_x V_1^2}$, $k_2 = \frac{mg}{0.5\rho\sigma c_y V_1^2}$ - другие безразмерные коэффициенты.

Система уравнений (1) в безразмерных переменных будет иметь вид (3):

$$\begin{aligned}\frac{dv}{d\tau} &= -\sin \vartheta - k_1 v^2 + T' \cos \delta \\ v \frac{d\vartheta}{d\tau} &= -\cos \vartheta + k_2 v^2 + T' \sin \delta\end{aligned}\quad (3)$$

Найдем основные стационарные режимы в системе (3). Будем искать установившиеся движения при полете нашего планирующего тела в случае: $v_* \equiv const, \vartheta_* \equiv const$. Правые части системы (3) обращаются в нуль, и мы получаем стационарное значение скорости и угла для режимов горизонтального полета:

$$1. \quad v_1 = \sqrt{\frac{1 + T'(\cos \delta - \sin \delta)}{k_1 + k_2}} \quad \vartheta_1 \equiv 0 \quad (4)$$

$$2. \quad v_2 = \sqrt{\frac{1 + T'(\sin \delta - \cos \delta)}{k_1 + k_2}} \quad \vartheta_{23} \equiv \pm \pi \quad (5)$$

Режим (5) соответствует полету ЛА хвостом вперед v_1, v_2 - это скорости, при которой сила тяжести уравнивает подъемную силу. Назовем ее наименьшей скоростью горизонтального полета.

В случае полета планера, если $T=0$ существуют еще два установившихся движения и будем иметь:

$$3. \quad v_3 = \sqrt{\frac{\cos \vartheta_3 - \sin \vartheta_3}{k_1 + k_2}} \quad \vartheta_3 = -\arctg \frac{c_y}{c_x} = -\arctg k \quad k = \frac{c_y}{c_x} \quad (6)$$

$$4. \quad v_4 = \sqrt{\frac{\sin \vartheta_4 - \cos \vartheta_4}{k_1 + k_2}} \quad \vartheta_4 = \pm \pi - \arctg k \quad (7)$$

Здесь k - аэродинамическое качество. Режим (7) соответствует полету ЛА хвостом вперед. Режимы (6), (7) назовем режимами планирования. Это движение материальной точки по наклонной прямой

В случае, если $T \neq 0$ существует еще один режим:

$$5. \quad v_5 = \sqrt{\frac{1 + T'(\cos \delta - \sin \delta)}{k_1 + k_2}}, \quad \vartheta_5 = \frac{\pi}{2} \quad (8)$$

Такой режим (8) мы назовем режимом вертикального спуска. Ему соответствует падение материальной точки по вертикальной прямой.

В случае движения, если $T \neq 0$, будем иметь еще два режима:

$$5. \quad v_5 = \sqrt{\frac{T'(\cos \delta + \sin \delta)}{k_2 - k_1}}, \quad \vartheta_5 = \arctg \frac{T' \sin \delta + k_2 v_5^2}{T' \cos \delta - k_2 v_5^2} \quad (9)$$

$$6. \quad v_6 = \sqrt{\frac{T'(\cos \delta + \sin \delta)}{k_2 - k_1}}, \quad \vartheta_6 = \pm \pi - \arctg \frac{T' \sin \delta + k_2 v_5^2}{T' \cos \delta - k_2 v_5^2} \quad (10)$$

Режим (10) соответствует полету ЛА хвостом вперед. Режимы (9), (10) назовем режимами пикирования.

Таким образом, мы получили основные стационарные режимы в рассматриваемой задаче о движении материальной точки под действием аэродинамических сил и силы тяжести. Для нас среди всех рассмотренных режимов наиболее интересен режим горизонтального полета (4), т.к. он происходит самое продолжительное время и чаще всего встречается при полете ЛА.

Введем малые отклонения: $\Delta v = v - v_1, \Delta \vartheta = \vartheta$

Проведем линеаризацию уравнений (3) и выпишем уравнения первого приближения:

$$\frac{d\Delta v}{d\tau} = -\Delta \vartheta - 2k_1 v_1 \Delta v$$
$$\frac{d\vartheta}{d\tau} = 2k_2 \Delta v$$

Найдем корни характеристического уравнения: $\lambda_{12} = -k_1 \pm \sqrt{k_1^2 v_1^2 - 2k_2^2}$ Для возникновения устойчивого режима в особой точке типа устойчивый узел учитывая, что $k_1 > k_2$, условие устойчивости будет иметь вид:

$$T' < \frac{(k_1 + k_2)(k_1^2 + 2k_2^2) - 1}{\cos \delta - \sin \delta}$$

При выполнении условия $T' = \frac{(k_1 + k_2)(k_1^2 + 2k_2^2) - 1}{\cos \delta - \sin \delta}$ Возникает критический случай и надо рассматривать высшие приближения.

При выполнении условия: $T' > \frac{(k_1 + k_2)(k_1^2 + 2k_2^2) - 1}{\cos \delta - \sin \delta}$ учитывая, что $k_1 > k_2$, мы будем иметь особую точку типа седло и неустойчивый режим горизонтального полета.

Приведем также условия устойчивости для режима планирования (6), в случае $T=0$. Установившийся угол планирования должен удовлетворять условиям:

$$\arccos\left(\frac{(k_1 + k_2)(k_1^2 + 2k_2^2) - 1}{\sqrt{2}k_1}\right) - \frac{\pi}{4} + 2\pi k < \vartheta_3 < \frac{7\pi}{4} - \arccos\left(\frac{(k_1 + k_2)(k_1^2 + 2k_2^2) - 1}{\sqrt{2}k_1}\right) + 2\pi k$$

В других случаях режим планирования неустойчив. Устойчивость аналогичных систем рассматривалась в [7]. Значения аэродинамических функций были взяты из работы [8]. Перейдем к описанию поведения траекторий движения материальной точки.

Численное моделирование

Опишем траектории движения материальной точки, полученных при численном интегрировании уравнений (1),(2) в системе matlab 2022 при различных значениях параметров. При достаточно больших значениях начальной скорости точка делает подъем, описывает одну или две незамкнутых петли и переходит в режим планирования с постоянной

скоростью и углом наклона траектории (рис 1,2). При отсутствии силы тяжести, материальная точка двигалась бы только по замкнутой окружности. При движении по окружности угол ϑ меняется равномерно по времени и пропорционален пройденному пути. При увеличении силы тяги и уменьшении силы тяжести и большой начальной скорости, появляется петлеобразная траектория (Рис. 3). Такое периодическое решение не является стационарным режимом, но интересно его описать. На этом режиме среднее движение близко к горизонтальному, а амплитуда колебаний возле этого движения не меняется, но может увеличиваться при уменьшении массы. Частота петель будет увеличиваться с ростом силы тяги.

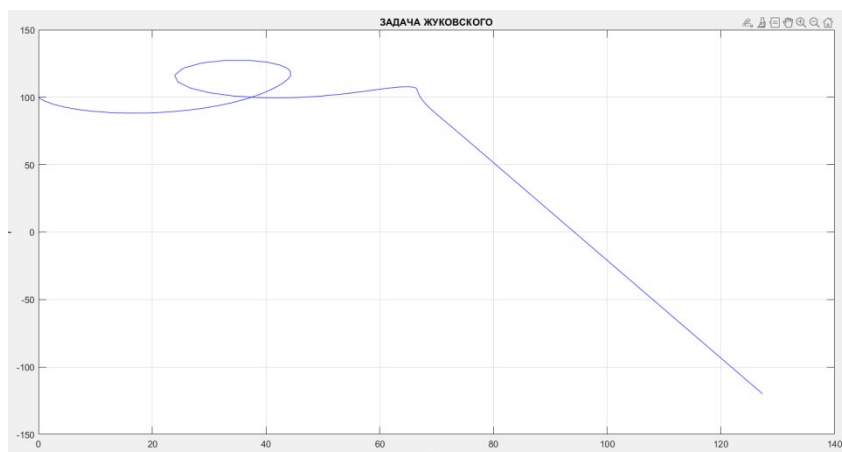


Рис. 1 Горка, мертвая петля и переход в режим планирования

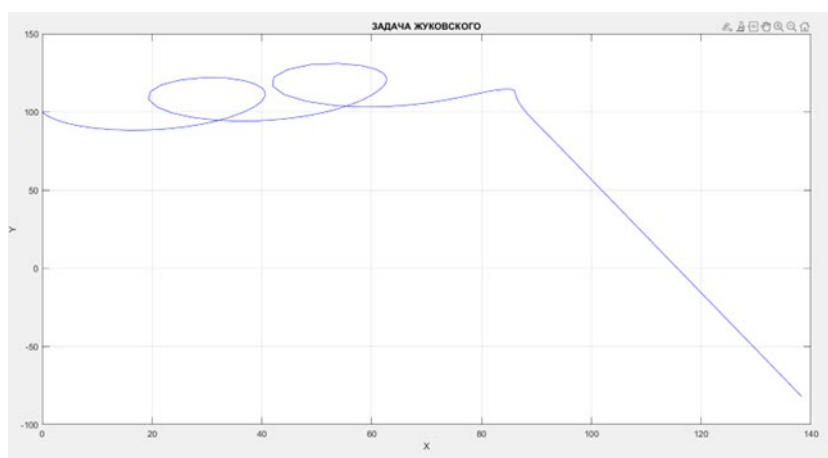


Рис. 2 Горка, две мертвых петли и переход в режим планирования

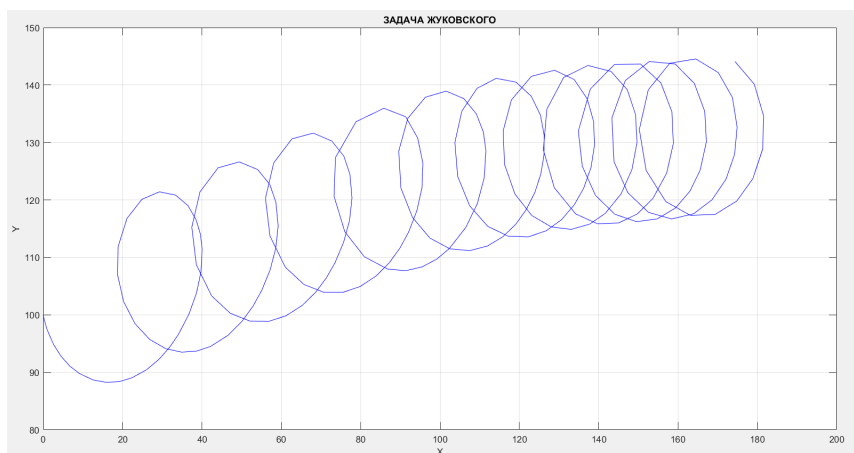


Рис.3 Петлеобразная траектория движения

При меньших значениях начальной скорости и силы тяги петлеобразная траектория сменяется подъемом, далее следует ее зависание и переход в режим пикирования с постоянной скоростью и углом наклона траектории(Рис.4).

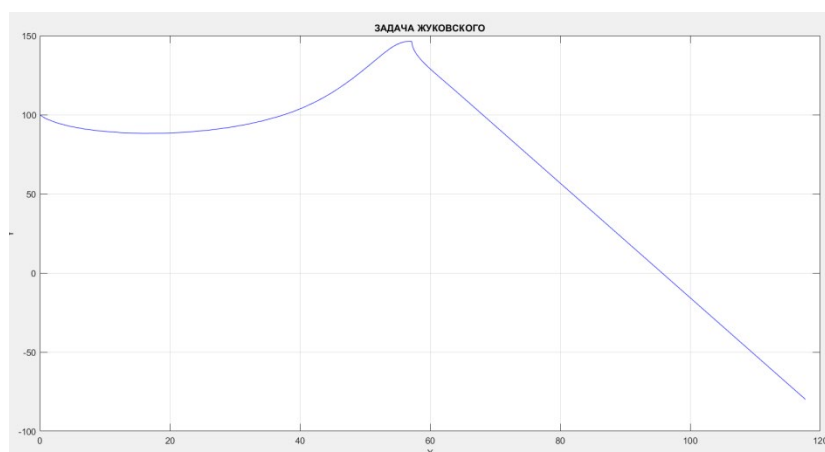


Рис. 4 Горка, зависание и переходом в режим пикирования

Аналогичные модели и методы исследования описаны в работах [8-10]. Из иностранных источников можно отметить работы [11,12].

Таким образом, мы получили основные движения материальной точки в задаче Жуковского, дополненной постоянной силой тяги.

Заключение

1. Разработана математическая модель движения материальной точки в задаче о планирующем полете с учетом силы тяги в безразмерных переменных.
2. Получены различные стационарные режимы полета и исследована их устойчивость.
3. Получены траектории движения на различных режимах.

Литература

1. Жуковский Н. Е. О парении птиц(доклад в Московском математическом обществе 22 октября 1891 г.) . – Берлин: Издательство Бюро иностранной науки и техники, 1922., 30 С. URL: litres.ru/book/nikolay-zhukovskiy/o-parenii-ptits-512115/?ysclid=madw6ullml1757695
2. Локшин Б. Я., Самсонов В. А., Селюцкий Ю. Д. О развитии некоторых задач Н.Е. Жуковского / Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. “Естественные науки”, 2014. № 2.
URL: cyberleninka.ru/article/n/o-razvitii-nekotoryh-zadach-n-e-zhukovskogo?ysclid=maku2up0g6185814555
3. Андронов А. А., Витт А. А., Хайкин С.Э. Теория колебаний / Москва: Издательство Физико-математической литературы, 1959. 915. URL: djvu.online/file/tU6gg0gHCYzJ7?ysclid=makuwjy6kk792494110
4. Беляков Д. В. Разработка и особенности математической модели ветротурбины Дарье. // Международный журнал открытых

информационных технологий. 2015 г. №3.

URL: injoit.org/index.php/j1/article/view/226

5. Беляков Д. В. Исследование движения осесимметричного тела в квазистатической среде. // Современные информационные технологии и ИТ образование. 2016 г. №2 URL: sitito.cs.msu.ru/index.php/SITITO/article/view/82
6. Беляков Д. В. Исследование и особенности математической модели ротора Дарье // Инженерный вестник Дона, 2023. №8. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n8y2023/8642
7. Урывская Т. Ю. Устойчивость линейных систем с положительно определенной матрицей // Инженерный вестник Дона, 2017. №4. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n4y2017/4464
8. Табачников В.Г. Стационарные характеристики крыльев на малых скоростях во всем диапазоне углов атаки // Труды ЦАГИ. Москва: Наука, 1974. 154. С.
9. Пшихопов В.Х., Кульченко А.Е., Чуфистов В.М. Моделирование полета одновинтового вертолета под управлением позиционно-траекторного регулятора// Инженерный вестник Дона, 2013. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n2y2013/1650
10. Локшин Б.Я., Привалов В.А., Самсонов В.А. Введение в задачу о движении точки и тела в сопротивляющейся среде. Москва: Издательство Московского университета., 1992. 38. С.
11. Vittecoq P. A., Laneville A. V. The Aerodynamic Forces for a Darrieus Rotor with Straight Blades: Wind Tunnel Measurement. // Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics. 1983. №15. pp. 406-412.
12. Parashivoiu I Aerodynamics Loads and and performance of the Darrieus Rotor // Journal of Energy . 1982. №6. pp. 315-321.

References

1. Zhukovskij N. E. O parenii pticz. [About soaring birds]. Berlin: Izdatel'stvo Byuro inostrannoj nauki i texniki, 1922, p.30.
2. Lokshin B. Ya., Samsonov V. A., Selyuczkij Yu. D. Vestnik MGTU im. N.E. Bauman. Ser. "Estestvenny'e nauki", 2014. № 2. URL: cyberleninka.ru/article/n/o-razvitii-nekotoryh-zadach-n-e-zhukovskogo?ysclid=maku2up0g6185814555
3. A. A. Andronov A. A. Vitt S.E. Xajkin Teoriya kolebanij [Theory of oscillations]. Moskva: Izdatel'stvo Fiziko-matematicheskoy literatury, 1959. 915 p.
4. Belyakov D. V. Mezhdunarodnyj zhurnal otkrytyh informacionnyh tekhnologij. 2015. №3. URL: injoit.org/index.php/j1/article/view/226
5. Belyakov D. V. Mezhdunarodnyj zhurnal otkrytyh informacionnyh tekhnologij. 2015 . №3. URL: injoit.org/index.php/j1/article/view/790
6. Belyakov D. V. Inzhenernyj vestnik Dona, 2023. №8. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n8y2023/8642
7. Ury`vskaya T. Yu. Inzhenernyj vestnik Dona. №4. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n4y2017/4464
8. Tabachnikov V.G. Stacionarny'e xarakteristiki kry'l'ev na малы`x skorostyax vo vsem diapazone uglov ataki [Stationary characteristics of wings at low speeds over the entire range of angles of attack]. Trudy` CzAGI . Moskva: Nauka, 1974. P. 154.
9. Pshixopov V.X., Kul`chenko A.E., Chufistov V.M. Inzhenernyj vestnik Dona. 2013. №2. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n2y2013/1650
10. Lokshin B.Ya. , Privalov V.A., Samsonov V.A. Model'naya zadacha o flattere [model problem about flutter]. Vvedenie v zadachu o dvizhenii



tochki i tela v soprotivlyayushheysya srede. Moskva: Izdatel'stvo Moskovskogo universiteta., 1992. P. 38.

11. Vittecoq P. A., Laneville A. V. Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics. 1983. №15. pp. 406-412.

12. Parashivoiu I Journal of Energy. 1982. №6. pp. 315-321.

Дата поступления: 18.04.2025

Дата публикации: 25.06.2025