

Плоская осесимметричная задача термовязкоупругости для полимерного цилиндра

А. Е. Дудник, А. С. Чепурненко, Н. И. Никора

Ростовский государственный строительный университет

Аннотация: Разработана методика определения напряженно-деформированного состояния толстостенных полимерных цилиндрических оболочек, находящихся в условиях плоского напряженного состояния с учетом температурных воздействий и деформаций ползучести. В качестве закона связи между напряжениями и деформациями используется нелинейное уравнение Максвелла–Гуревича. Решение выполняется численно методом конечных элементов.

Ключевые слова: нелинейная ползучесть, цилиндр, уравнение Максвелла–Гуревича, метод конечных элементов, релаксационная вязкость, вязкоупругость, модуль высокоэластичности, плоское напряженное состояние, температура.

Рассматривается толстостенный цилиндр, находящийся в условиях плоского напряженного состояния (ПНС). Температура цилиндра, а также модуль упругости и все релаксационные характеристики материала являются функциями от радиуса r и времени t . Решение данной задачи методом конечных разностей для однослойного цилиндра приводится в работах [1–6]. В настоящей статье задача решается при помощи метода конечных элементов, который позволяет рассчитывать и многослойные цилиндры.

Связь между напряжениями и деформациями для плоского напряженного состояния имеет вид:

$$\begin{aligned}\varepsilon_r &= \frac{1}{E}(\sigma_r - \nu\sigma_\theta) + \varepsilon_r^* + \alpha\Delta T; \\ \varepsilon_\theta &= \frac{1}{E}(\sigma_\theta - \nu\sigma_r) + \varepsilon_\theta^* + \alpha\Delta T,\end{aligned}\tag{1}$$

где ε_r^* , ε_θ^* — деформации ползучести.

Перепишем соотношения (1) в матричном виде:

$$\{\varepsilon\} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu \\ -\nu & 1 \end{bmatrix} \{\sigma\} + \{\varepsilon_s\},\tag{2}$$

где $\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_r \\ \sigma_\theta \end{Bmatrix}$ — вектор напряжений, $\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_r \\ \varepsilon_\theta \end{Bmatrix}$ — вектор полных деформаций, $\{\varepsilon_\varepsilon\} = \alpha\Delta T \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \varepsilon_r^* \\ \varepsilon_\theta^* \end{Bmatrix}$ — вектор вынужденных (неупругих) деформаций.

Выразим из (2) напряжения через деформации:

$$\{\sigma\} = \left(\frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu \\ -\nu & 1 \end{bmatrix} \right)^{-1} (\{\varepsilon\} - \{\varepsilon_\varepsilon\}) = [D](\{\varepsilon\} - \{\varepsilon_\varepsilon\}), \quad (3)$$

$$\text{где } [D] = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu \\ \nu & 1 \end{bmatrix}.$$

Будем использовать одномерный элемент с двумя узлами и одной степенью свободы в узле — перемещением u вдоль радиуса (рис. 1).

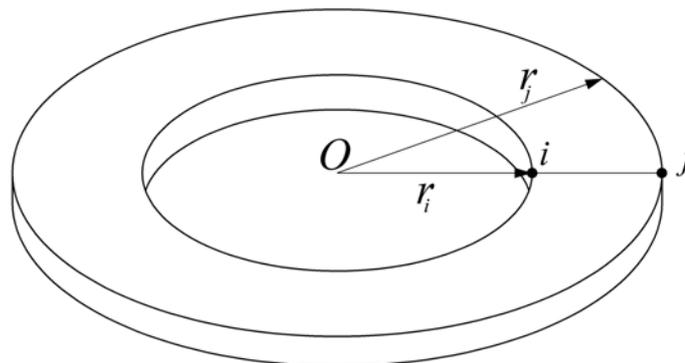


Рис. 1. — Одномерный КЭ плоской осесимметричной задачи

Связь между перемещениями и деформациями для осесимметричной задачи имеет вид:

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_r \\ \varepsilon_\theta \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial r} \\ \frac{u}{r} \end{pmatrix}. \quad (4)$$

Для перемещений в пределах элемента принимаем линейную аппроксимацию:

$$u(r) = N_i u_i + N_j u_j = \{N_i \quad N_j\} \{U\}, \quad (5)$$

где $N_i = 1 - \frac{r - r_i}{r_j - r_i}$, $N_j = \frac{r - r_i}{r_j - r_i}$ — функции формы, $\{U\} = \{u_i \quad u_j\}^T$ — вектор узловых перемещений.

Подставив (5) в (4), получим:

$$\{\varepsilon\} = [B]\{U\}, \text{ где } [B] = \begin{bmatrix} -\frac{1}{r_j - r_i} & \frac{1}{r_j - r_i} \\ N_i / r & N_j / r \end{bmatrix}. \quad (6)$$

Потенциальная энергия деформации элемента записывается в виде:

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_V \{\sigma\}^T \{\varepsilon^{el}\} dV = \frac{1}{2} \int_{r_1}^{r_2} \{\sigma\}^T \{\varepsilon^{el}\} 2\pi r dr, \quad (7)$$

где $\{\varepsilon^{el}\} = \{\varepsilon\} - \{\varepsilon_e\}$ — упругая деформация.

Подставим (3) и (6) в (7), считая, что вынужденные деформации в пределах элемента постоянны:

$$\begin{aligned} \Pi = & \frac{1}{2} (\{U\}^T \int_{r_1}^{r_2} [B]^T [D] [B] 2\pi r dr \{U\} - 2\{U\}^T \int_{r_1}^{r_2} [B]^T [D] 2\pi r dr \{\varepsilon_e\} + \\ & + \int_{r_1}^{r_2} 2\pi r dr \{\varepsilon_e\}^T [D] \{\varepsilon_e\}). \end{aligned} \quad (8)$$

Применяя принцип минимума полной энергии Э, получим:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \{U\}} = \frac{\partial \Pi}{\partial \{U\}} + \frac{\partial A}{\partial \{U\}} = [K]\{U\} - \{F_e\} - \{F\} = 0, \quad (9)$$

где A — работа внешних сил; $[K] = \int_{r_1}^{r_2} [B]^T [D] [B] 2\pi r dr$ — матрица жесткости;

$\{F_e\} = \int_{r_1}^{r_2} [B]^T [D] 2\pi r dr \{\varepsilon_e\}$ — вклад в вектор нагрузки вынужденных деформаций; $\{F\}$ — вектор внешних узловых нагрузок.

Была решена модельная задача для цилиндра из ЭДТ-10 с внутренним радиусом $a = 8$ мм, внешним радиусом $b = 28$ мм. В качестве уравнения связи

между напряжениями и деформациями ползучести использовалось нелинейное уравнение Максвелла–Гуревича [7–9]. Эмпирические зависимости модуля упругости и релаксационных констант от температуры были взяты из работы [10]:

$$E = -17.5T + 3525 [\text{МПа}]; E_{\infty} = -30T + 3150 [\text{МПа}];$$
$$m^* = -0.011T + 4.75 [\text{МПа}]; \eta_0^* = 104430 \cdot e^{-0.0275T} [\text{МПа} \cdot \text{ч}]. \quad (10)$$

Температуру в формулу (10) следует подставлять в градусах Цельсия.

Коэффициент температурного расширения для ЭДТ–10: $\alpha = 8 \cdot 10^{-5} \frac{1}{^{\circ}\text{C}}$.

Температура цилиндра на внешней поверхности была постоянной — $T_b = 28^{\circ}\text{C}$, а на внутренней росла в течение 1.2 часа от 28°C до 100°C с постоянной скоростью.

На рис. 2 и 3 представлены соответственно графики распределения в толще цилиндра напряжений σ_r и σ_{θ} в моменты времени $t = 0.4$ ч (черная линия), $t = 1.2$ ч (красная линия) и $t = 13.4$ ч (фиолетовая линия). Штриховой линией показано упругое решение.

Из представленных графиков видно существенное влияние ползучести материала на напряженно-деформированное состояние цилиндра. Как напряжения σ_r , так и напряжения σ_{θ} с течением времени по абсолютной величине убывают. Кроме того, меняется и характер кривых $\sigma_r(r)$ и $\sigma_{\theta}(r)$. На кривой $\sigma_r(r)$ экстремальное значение смещается от внутренней поверхности ближе к середине толщи цилиндра.

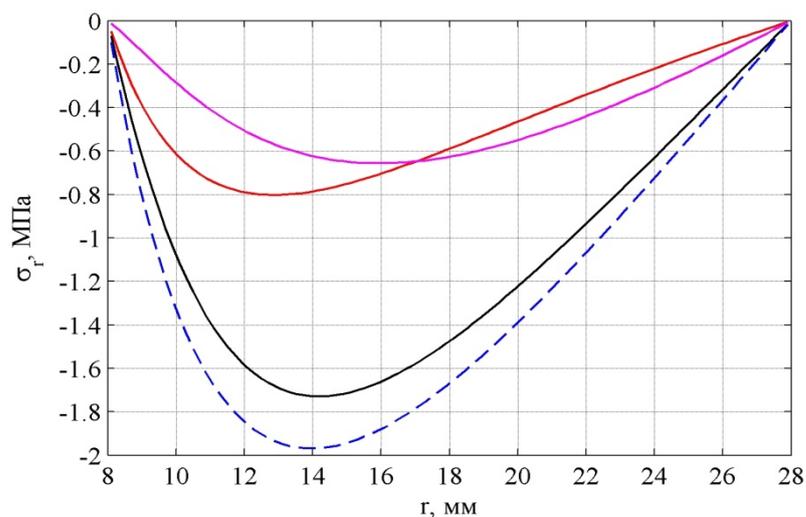


Рис. 2. — Распределение напряжений σ_r в толще цилиндра

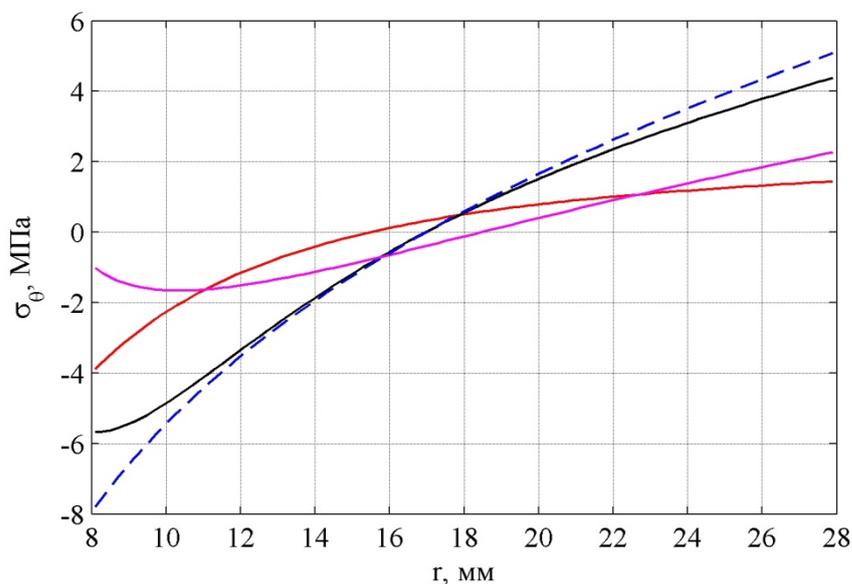


Рис. 3. — Распределение напряжений σ_θ в толще цилиндра

Литература

1. Андреев В.И. Некоторые задачи и методы механики неоднородных тел: монография. М.: Издательство АСВ, 2002. 288 с.
2. Козельская М.Ю., Чепурненко А.С., Литвинов С.В. Применение метода Галёркина при расчете на устойчивость сжатых стержней с учетом ползучести // «Инженерный вестник Дона», 2013, №2. URL: ivdon.ru/magazine/archive/n2y2013/1714.

3. Литвинов С. В., Козельский Ю. Ф., Языев Б. М. Расчёт цилиндрических тел при воздействии теплового и радиационного нагружений // «Инженерный вестник Дона», 2012, №. 3. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n3y2012/954.

4. Языев Б.М. Нелинейная ползучесть непрерывно неоднородных цилиндров. Дисс. канд. техн. наук. М., 1990. 171 с.

5. Языев Б. М., Литвинов С. В., Козельский Ю. Ф. Плоская деформация элементов цилиндрических конструкций под действием физических полей // «Инженерный вестник Дона», 2013, №. 2. URL: ivdon.ru/uploads/article/pdf/IVD_24_yaziev.pdf_1616.pdf.

6. Языев Б. М., Чепурненко А. С., Литвинов С. В., Козельская М. Ю. Напряженно–деформированное состояние предварительно напряженного железобетонного цилиндра с учетом ползучести бетона // Научное обозрение. №11. Часть 3. 2014. С. 759–763.

7. Гуревич Г.И. Об обобщении уравнения Максвелла на случай 3 измерений с учётом малых деформаций упругого последействия // Труды ИФЗ АН СССР. 1959. №2 (169). С. 169

8. Vladimir I. Andreev, Anton S. Chepurnenko, Batyr M. Yazyev. Energy Method in the Calculation Stability of Compressed Polymer Rods Considering Creep//Advanced Materials Research Vols. 1004-1005 (2014) pp 257–260. Trans Tech Publications, Switzerland

9. Vladimir I. Andreev, Batyr M. Yazyev, Anton S. Chepurnenko. On the Bending of a Thin Plate at Nonlinear Creep // Advanced Materials Research Vol. 900 (2014) pp 707–710. Trans Tech Publications, Switzerland.

10. Бабиц В. Ф., Рабинович А. Л. Влияние температуры на механические характеристики некоторых эпоксидных связующих // Физико–химия и механика ориентированных стеклопластиков. 1967. С. 150–153.

References

1. Andreev V.I. Nekotorye zadachi i metody mekhaniki neodnorodnykh tel: monografiya [Some problems and methods of mechanics of inhomogeneous bodies]. M.: Izdatel'stvo ASV, 2002. 288 p.
2. Kozel'skaya M.Yu., Chepurnenko A.S., Litvinov S.V. Inženernyj vestnik Dona (Rus), 2013, №2. URL: ivdon.ru/magazine/archive/n2y2013/1714.
3. Litvinov S. V., Kozel'skiy Yu. F., Yazyev B. M. Inženernyj vestnik Dona (Rus), 2012, №. 3. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n3y2012/954.
4. Yazyev B.M. Nelineynaya polzuchest' nepreryvno neodnorodnykh tsilindrov [Nonlinear creep of continuously inhomogeneous cylinders]. Diss. kand. tekhn. nauk. M., 1990. 171 p.
5. Yazyev B. M., Litvinov S. V., Kozel'skiy Yu. F. Inženernyj vestnik Dona (Rus), 2013, №. 2. URL: ivdon.ru/uploads/article/pdf/IVD_24_yaziev.pdf_1616.pdf.
6. Yazyev B. M., Chepurnenko A. S., Litvinov S. V., Kozel'skaya M. Yu. Nauchnoe obozrenie. №11. Chast 3. 2014, pp 759–763.
7. Gurevich G.I. Trudy IFZ AN SSSR. 1959. №2 (169), pp. 169.
8. Vladimir I. Andreev, Anton S. Chepurnenko, Batyr M. Yazyev. Advanced Materials Research Vols. 1004–1005 (2014) pp. 257–260. Trans Tech Publications, Switzerland.
9. Vladimir I. Andreev, Batyr M. Yazyev, Anton S. Chepurnenko. Advanced Materials Research Vol. 900 (2014) pp.707–710. Trans Tech Publications, Switzerland.
10. Babich V. F., Rabinovich A. L. Fiziko–khimiya i mekhanika orientirovannykh stekloplastikov. 1967, pp. 150–153.