Моделирование взаимодействия ВУЗа и его индустриального партнёра

А.Н. Газанчян[1], Г.А. Угольницкий[2], В.Ю. Калачёв[3]

[1]Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону
[2]Институт математики, механики и компьютерных наук им. И.И. Воровича

Аннотация: В статье использован математический аппарат теории линейно-квадратичных дифференциальных игр, а также метод качественно репрезентативных сценариев для построения математической модели взаимодействия ВУЗа и его индустриального партнёра. Получено аналитическое решение игры (равновесие Нэша), а также продемонстрировано численное решение задачи.
Ключевые слова: линейно-квадратичная дифференциальная игра, математическое моделирование, метод качественно репрезентативных сценариев, теория игр.

Введение

При партнёрстве ВУЗа с бизнесом оба учреждения играют свою роль в подготовке квалифицированных специалистов, тем самым, увеличивают свои выигрыши и диверсифицируют затраты. ВУЗ заинтересован в выпуске большего количества высококвалифицированных специалистов, а бизнес-организация, в свою очередь, заинтересована в их получении. Таким образом, возникает ситуация, которая порождает игру, где в роли игроков выступают ВУЗ и бизнес-организация. Для точного описания таких процессов и достижения оптимальных результатов необходимо провести математическое моделирование. В связи с этим, целесообразно использовать теорию игр, а именно линейно-квадратичных дифференциальных игр, а также рассмотреть нахождение равновесия Нэша методом КРС ИМ (качественно репрезентативных сценариев имитационного моделирования).

Общая теория линейно-квадратичных игр представлена в работах [1-3]. В них авторы описывают основные типы линейно-квадратичных дифференциальных игр. В работах [4-6] описываются линейно-квадратичные дифференциальные игры открытого цикла, а также возможность нахождения единственного аналитического решения для игры такого вида. Но при нахождении аналитического решения мы сталкиваемся с ограничениями, которые не дают возможности рассмотреть все возможные сценарии игры. Для решения этой проблемы используется имитационное моделирование [7-9] и метод КРС ИМ (качественно репрезентативные сценарии имитационного моделирования) [10].

Математическая постановка

Введём следующую модель, которая будет описывать взаимодействие учреждений высшего образования и индустриальных партнёров. Для начала введём стоимостные функции, которые отражают дисконтированный выигрыш каждого игрока:

$$J_1 = \int_0^\infty e^{-\rho t}[a_1 x(t) - b_1 u_1^2(t)]dt \to \max,\ 0 \le u_1(t) \le \bar{u}_1; (1)$$

$$J_2 = \int_0^\infty e^{-\rho t}[a_2 x(t) - b_2 u_2^2(t)]dt \to \max,\ 0 \le u_2(t) \le \bar{u}_2; (2)$$

Опишем динамику системы. Каждый игрок вносит свой вклад в выпуск специалистов в год t.

$$\dot{x} = c_1 u_1(t) + c_2 u_2(t) - \mu x(t), \quad x(0) = x_0; \qquad (3)$$

Здесь:

$x(t)$ - число подготовленных квалифицированных специалистов в году t;

J_1, J_2 - суммарные дисконтированные выигрыши ВУЗов и бизнеса от подготовки специалистов с учётом затрат;

$u_i(t)$ - инвестиции i-го игрока в подготовку специалистов в году t;

$a_i > 0$ - коэффициент полезности i-го игрока от подготовки специалистов;

$b_i > 0$ - коэффициент затрат i-го игрока на подготовку специалистов;

$c_i > 0$ - коэффициент эффективности i-го игрока при подготовке специалистов;

$\bar{u}_i$ - предельный бюджет i-го игрока на подготовку специалистов;

$\mu > 0$ - коэффициент "амортизации" при отсутствии вложений в подготовку специалистов;

$\rho \in [0,1]$ - коэффициент дисконтирования;

$x_0 > 0$ - начальное значение числа подготовленных квалифицированных специалистов.

Исходная модель управления описывает взаимодействие ВУЗа и бизнеса как двух игроков, каждый из которых старается максимизировать свой выигрыш и обладает информацией только о начальном состоянии системы и виде управляющей функции. Этот факт говорит о том, что мы имеем дело с линейно-квадратичной дифференциальной игрой в программных стратегиях, а значит, можем найти аналитическое решение задачи, воспользовавшись алгоритмом, представленным в работах [1-3].

Пример поиска аналитического решения

Во время нахождения аналитического решения возникает неравенство, которое вводит ограничения на коэффициенты: $b_1 b_2 > \dfrac{a_1 b_2 c_1^2 + a_2 b_1 c_2^2}{\mu^2}$.

Выбрав коэффициенты игры, которые удовлетворяют исходному неравенству, мы обеспечим существование единственного равновесия Нэша. Зададим коэффициенты линейно-квадратичной игры:

$$\mu = 0.1, \rho = 0.9, c_1 = \frac{1}{300000}, c_2 = \frac{1}{200000}, a_1 = 35000, a_2 = 250000, b_1 = b_2 = 0.002, x_0 = 200, T = 5.$$

Применяя алгоритм нахождения единственного решения линейно-квадратичной дифференциальной игры, находим управляющие функции, которые и обеспечат единственное равновесие Нэша:

$$u_1^*(t) = 106508.722 e^{-0.54t}$$
$$u_2^*(t) = 114116.488 e^{-0.54t}$$

Подставляя полученные функции управления в уравнение динамики, получим соответствующее равновесное состояние системы: $x^*(t) = x_0 e^{-A_{cl} t}$

Функции управления (u_1^*, u_2^*) являются единственным равновесием Нэша для линейно-квадратичной дифференциальной игры двух лиц в программных стратегиях. Проверим данное утверждение. Для этого рассмотрим другие варианты функций управления и проверим выполнение следующих неравенств: $J_1(u_1^*, u_2^*) \le J_1(u_1, u_2^*)$ и $J_2(u_1^*, u_2^*) \le J_2(u_1^*, u_2)$, где (u_1, u_2) – иные допустимые функции управления.

Таблица № 1

Проверка равновесия Нэша

$u_1(t)$, руб.	$u_2(t)$, руб.	$J_1(u_1^*, u_2^*)$, руб.	$J_1(u_1, u_2^*)$, руб.	$J_2(u_1^*, u_2^*)$, руб.	$J_2(u_1, u_2^*)$, руб.
$60000e^{-0.54t}$	$20000e^{(-0.54t)}$	$-1.2759 \cdot 10^{10}$	$-1.2756 \cdot 10^{10}$	$-9.10 \cdot 10^{9}$	$-9.08 \cdot 10^{9}$
$60000e^{-0.24t}$	$20000e^{(-0.24t)}$	$-1.2759 \cdot 10^{10}$	$-1.2756 \cdot 10^{10}$	$-9.10 \cdot 10^{9}$	$-9.0818 \cdot 10^{9}$
$300000e^{-0.54t}$	$200000e^{(-0.54t)}$	$-1.2759 \cdot 10^{10}$	$-1.268 \cdot 10^{10}$	$-9.10 \cdot 10^{9}$	$-9.09 \cdot 10^{9}$
$300000e^{-0.24t}$	$200000e^{(-0.24t)}$	$-1.2759 \cdot 10^{10}$	$-1.255 \cdot 10^{10}$	$-9.10 \cdot 10^{9}$	$-9.04 \cdot 10^{9}$
$300000e^{-0.84t}$	$200000e^{(-0.84t)}$	$-1.2759 \cdot 10^{10}$	$-1.272 \cdot 10^{10}$	$-9.10 \cdot 10^{9}$	$-9.099 \cdot 10^{9}$

Данная таблица подтверждает то, что (u_1^*, u_2^*) является единственным равновесием Нэша для линейно-квадратичной дифференциальной игры двух лиц в программных стратегиях. Суммарные выигрыши каждого из игроков при этом равны:

$$J_1 = \int_0^T (a_1 x^2(t) - b_1 u_1^2(t)) dt = 1.257 \cdot 10^{10}, \quad J_2 = \int_0^T (a_2 x^2(t) - b_2 u_2^2(t)) dt = 9.099 \cdot 10^{9}.$$

Можно заметить, что вид стоимостных функций, а именно $x^2(t)$, отличается от исходных стоимостных функций в модели взаимодействия ВУЗа и бизнеса. Там они были выбраны ввиду требований наличия квадрата у $x(t)$ для работы алгоритма по поиску аналитического решения задачи.

Помимо этого, мы можем наблюдать, что при оптимальных функциях управления, $x(t)=x_0e^{-A_{cl}t}$ – убывающая функция, и этот факт говорит о том, что количество специалистов при достижении единственного равновесия Нэша будет сокращаться. Эти результаты связаны с тем, что алгоритм требует устойчивости по динамике, что делает невозможным рассмотреть случай, когда инвестиции игроков вместе с количеством выпускаемых специалистов растут. Но имея оптимальный вид функции управления для каждого из игроков, и определив минимальные и максимальные инвестиции, мы можем найти единственное равновесие Нэша для исходной линейно-квадратичной дифференциальной игры в случае, когда инвестиции игроков вместе с количеством выпускаемых специалистов растут, с помощью метода КРС ИМ (качественно репрезентативных сценариев имитационного моделирования).

Пример поиска равновесия Нэша методом качественно репрезентативных сценариев имитационного моделирования

Перейдем от непрерывной версии модели к дискретной:

$$J_1(u_1)=\sum_{t=1}^{T}a_1x[t]-b_1u_1^2[t]\underset{u_1[t]}{\rightarrow}max,0\le u_1[t]\le U_1$$

$$J_2(u_2)=\sum_{t=1}^{T}a_2x[t]-b_2u_2^2[t]\underset{u_2[t]}{\rightarrow}max,0\le u_2[t]\le U_2$$

$$x[t+1]=c_1u_1[t]+c_2u_2[t]+(1-\mu)x[t-1]$$

Построив множества сценариев и обеспечив их внутреннюю и внешнюю устойчивость по $x(t)$ и $J_1(u_1(t)),J_2(u_2(t))$, мы можем приступить к поиску равновесия Нэша для линейно-квадратичной игры.

Рассмотрим исходную линейно-квадратичную дифференциальную игру, зададим её коэффициенты и найдем равновесие Нэша для различных множеств КРС (качественно репрезентативных сценариев) (N =3,5,9,17,33,65,129,257). Пусть:

$$a_1 = 350000, a_2 = 250000, c_1 = \frac{1}{300000}, c_2 = \frac{1}{200000}, \mu = 0.1, \rho = 0.9$$

$$x_0 = 10, U_{min,1} = U_{min,2} = 10^6 e^{0.48t}; U_{\max,1} = 10^8 e^{0.48t}, U_{\max,2} = 10^7 e^{0.48t}$$

где $U_{min,1}, U_{min,2}$ – сценарии первого и второго игрока, при которых планируется инвестировать минимальное количество бюджета, $U_{\max,1}, U_{\max,2}$ – максимальные инвестиции соответственно. N – количество элементов множества КРС (качественно репрезентативных сценариев).

В отличие от алгоритма, который находил аналитическое решение для игры, в методе КРС ИМ нет ограничений на коэффициенты. Следовательно, мы можем подбирать корректирующие коэффициенты b_1, b_2 таким образом, чтобы у игроков был как положительный выигрыш, так и отрицательный. Для начала рассмотрим случай положительного суммарного выигрыша игроков $b_1 = b_2 = 10^{-9}$.

Таблица №2

Случай $b_1 = b_2 = 10^{-9}$.

N	Δ, чел.	u_1^*, руб.	u_2^*, руб.	J_1, руб.	J_2, руб.
3	4404	$10^8 e^{0.48t}$	$10^7 e^{0.48t}$	$3.4 \cdot 10^8$	$2.4 \cdot 10^8$
5	2197	$10^8 e^{0.48t}$	$10^7 e^{0.48t}$	$3.4 \cdot 10^8$	$2.4 \cdot 10^8$
9	1093	$10^8 e^{0.48t}$	$10^7 e^{0.48t}$	$3.4 \cdot 10^8$	$2.4 \cdot 10^8$
17	541	$10^8 e^{0.48t}$	$10^7 e^{0.48t}$	$3.4 \cdot 10^8$	$2.4 \cdot 10^8$
33	265	$10^8 e^{0.48t}$	$10^7 e^{0.48t}$	$3.4 \cdot 10^8$	$2.4 \cdot 10^8$
65	128	$10^8 e^{0.48t}$	$10^7 e^{0.48t}$	$3.4 \cdot 10^8$	$2.4 \cdot 10^8$
129	59	$10^8 e^{0.48t}$	$10^7 e^{0.48t}$	$3.4 \cdot 10^8$	$2.4 \cdot 10^8$
257	24	$10^8 e^{0.48t}$	$10^7 e^{0.48t}$	$3.4 \cdot 10^8$	$2.4 \cdot 10^8$

При положительном суммарном выигрыше обоих игроков, равновесие Нэша будет достигнуто только в единственном сценарии – при максимальном бюджете. В действительности, уменьшая бюджет, каждый игрок уменьшает свой вклад в выпуск квалифицированных специалистов, тем самым уменьшая свой потенциальный суммарный выигрыш. При выборе оптимального сценария ни один из игроков не сможет улучшить свой суммарный выигрыш, выбрав иную стратегию.

Таблица №3

Случай $b_1 = b_2 = 10^{-4}$.

N	Δ, чел.	u_1^*, руб.	u_2^*, руб.	J_1, руб.	J_2, руб.
3	4404	$10^6 e^{0.48t}$	$10^6 e^{0.48t}$	$-2.6*10^8$	$-3.6*10^8$
5	2197	$10^6 e^{0.48t}$	$10^6 e^{0.48t}$	$-2.6*10^8$	$-3.6*10^8$
9	1093	$10^6 e^{0.48t}$	$10^6 e^{0.48t}$	$-2.6*10^8$	$-3.6*10^8$
17	541	$10^6 e^{0.48t}$	$10^6 e^{0.48t}$	$-2.6*10^8$	$-3.6*10^8$
33	265	$10^6 e^{0.48t}$	$10^6 e^{0.48t}$	$-2.6*10^8$	$-3.6*10^8$
65	128	$10^6 e^{0.48t}$	$10^6 e^{0.48t}$	$-2.6*10^8$	$-3.6*10^8$
129	59	$10^6 e^{0.48t}$	$10^6 e^{0.48t}$	$-2.6*10^8$	$-3.6*10^8$
257	24	$10^6 e^{0.48t}$	$10^6 e^{0.48t}$	$-2.6*10^8$	$-3.6*10^8$

В случае же, когда оба игрока будут получать отрицательный суммарный выигрыш, единственное равновесие Нэша будет достигаться только в том случае, если оба игрока выберут наименьший бюджет на данный промежуток времени. В данном случае игроки не могут улучшить своё положение, отходя от оптимальной стратегии по той причине, что, увеличив инвестиции в выпуск специалистов, игрок будет нести ещё большие потери.

Литература

1. Engwerda J. LQ dynamic optimization and differential games. John Wiley & Sons, 2005. 511 c.
2. Понтрягин Л. С. Математическая теория оптимальных процессов и дифференциальные игры // Труды Математического института имени Стеклова В. А. 1985. №0. С. 119–158.
3. Петросян Л. А., Зенкевич Н. А., Шевкопляс Е.В. Теория игр. Изд-во БХВ-Петербург, 2012. 424 с.
4. Engwerda J. Algorithms for computing Nash equilibria in deterministic LQ games // Computational Management Science. 2007. №2. С. 113–140.
5. Engwerda J. On the open-loop Nash equilibrium in LQ-games // Journal of Economic Dynamics and Control. 1998. №5. С. 729–762.
6. Zhang W., Zhao S., Wan X. Research on Industrial Digital Transformation Strategies Based on Differential Games // Applied Mathematical Modeling. 2021. №98. С. 90–108.
7. Шеннон Р. Имитационное моделирование систем – искусство и наука. Мир, 1978. 418 с.
8. Kleijnen J.P. Design and Analysis of Simulation Experiments. Springer, 2007. 220 c.
9. Nelson B.L. Some tactical problems in digital simulation for the next 10 years // Journal of Simulation. 2016. №10. С. 2–11.
10. Ougolnitsky G.A., Usov A.B. Computer Simulations as a Solution Method for Differential Games. Computer Simulations: Advances in Research and Applications. Nova Science Publishers, 2018. 232 c.

References

1. Engwerda J. LQ dynamic optimization and differential games. John Wiley & Sons, 2005. 511 p.
2. Pontryagin L. S., Trudy Matematicheskogo instituta imeni Steklova V. A. 1985 [Works of the V.A. Steklov Mathematical Institute]. №0. pp. 119–158.
3. Petrosyan L. A., Zenkevich N. A., Shevkoplyas E.V. Teoriya igr [Game Theory]. Izd-vo BKHV-Peterburg, 2012. 424 p.
4. Engwerda J. Computational Management Science. 2007. №2. pp. 113–140.
5. Engwerda J. Journal of Economic Dynamics and Control. 1998. №5. pp. 729–762.
6. Zhang W., Zhao S., Wan X. Applied Mathematical Modeling. 2021. №98. pp. 90–108.
7. Shennon R. Imitatsionnoye modelirovaniye sistem–iskusstvo i nauka [Simulation modeling of systems – art and science]. Mir, 1978. 418 p.
8. Kleijnen J.P. Design and Analysis of Simulation Experiments. Springer, 2007. 220 p.
9. Nelson B.L. Journal of Simulation. 2016. №10. pp. 2–11.
10. Ougolnitsky G.A., Usov A.B. Computer Simulations as a Solution Method for Differential Games. Computer Simulations: Advances in Research and Applications. Nova Science Publishers, 2018. 232 p.