

Математическое моделирование загрязнения водоёмов стационарными источниками

Г.И. Каныгин, А.Е. Кулиничева

Донской государственный технический университет, Ростов-на-Дону

Аннотация: В данной статье проанализирована динамика загрязнения водоёмов (на примере бассейна реки Дон) стационарными источниками за период 2000 – 2015 гг. с использованием методов математической статистики, построена эмпирическая модель для исследования тренда и колебаний динамики загрязнений. Для этого используются данные Росводоресурсов российского статистического ежегодника. Проверена адекватность модели для трёхлетних прогнозов с погрешностью до 8%. Выведена система дифференциальных уравнений, описывающая процесс загрязнений.

Ключевые слова: Математическая модель, статистические методы, линии тренда, дифференциальные уравнения, прогнозирование, адекватность модели.

Проблема загрязнения водных ресурсов интересует многих исследователей и серьезно рассматривается с научной точки зрения [1-4]. В настоящее время разработано и разрабатывается большое количество методик и способов по уменьшению погрешности прогноза уровня загрязнения. В основе этих методик лежат статистические данные и сложные математические модели. Однако, эти модели не носят общий характер и используются для исследования конкретных водоёмов.

Данная работа посвящена построению математической модели, отражающей процесс поступления загрязняющих веществ со сточными водами в бассейн реки Дон. Для её построения используются данные Росводоресурсов из российского статистического ежегодника [5], отображающие поступление загрязняющих веществ со сточными водами в бассейн реки Дон за период 2000 – 2015, которые отражены в таблицах 1, 2.

Построение математической модели осуществлено средствами программного приложения Microsoft Excel.

На рис. 1 отображена динамика загрязнения бассейна реки Дон вредными веществами со сточными водами за 2000 – 2015 г.

Таблица № 1

Объем сброса загрязненных сточных вод по бассейнам отдельных морей и рек (млрд.куб.м.)

Годы	1990	2000	2010	2011	2012	2013	2014	2015
Всего	27,8	20,3	16,5	16,0	15,7	15,2	14,8	14,4
Бассейн Балтийского моря в том числе бассейн р. Невы	2,7 1,6	2,2 0,5	2,0 0,4	1,9 0,3	1,8 0,3	1,8 0,3	1,7 0,2	1,7 0,2
Бассейн Черного моря	0,4	0,3	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2
Бассейн Азовского моря в том числе бассейны рек: Дона Кубани	3,9 0,9 1,7	2,0 0,8 0,8	1,6 0,7 0,5	1,6 0,8 0,5	1,6 0,8 0,5	1,6 0,6 0,5	1,5 0,8 0,5	1,5 0,5 0,5
Бассейн Каспийского моря в том числе бассейн р. Волги	11,8 11,1	9,2 8,3	7,3 6,4	7,1 6,2	7,0 6,2	6,9 6,2	6,4 5,6	6,3 5,5
Бассейн Карского моря в том числе бассейны рек: Енисея Оби	6,2 3,1 2,8	4,2 1,4 2,6	3,3 0,9 2,3	3,2 0,9 2,2	3,0 0,9 2,1	3,0 0,8 2,1	3,2 0,8 2,4	3,1 0,8 2,2
Бассейн Белого моря	1,1	0,9	0,7	0,7	0,7	0,6	0,6	0,6

Таблица № 2

Годовые выбросы вредных веществ в бассейн реки Дон
в млрд. кубических метров

Годы	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007
Выбросы (млрд.куб.м.)	0,8	0,7	0,9	0,8	0,7	0,7	0,7	0,7
Годы	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015
Выбросы (млрд.куб.м.)	0,6	0,6	0,7	0,6	0,6	0,6	0,6	0,5

Вывод уравнения линии тренда (линейной регрессии) реализован в программном приложении Microsoft Excel с помощью метода наименьших квадратов.



Рис. 1. – Динамика загрязнения бассейна реки Дон вредными веществами со сточными водами за 2000 – 2015 г.

Вывод уравнения линии тренда (линейной регрессии) реализован в программном приложении Microsoft Excel с помощью метода наименьших квадратов.

В результате было получено следующее уравнение: $Y = 36 - 0,02t$, где Y – количество загрязнений, t – время в годах.

На рис. 2 приведена динамика поступления загрязняющих веществ в бассейн реки Дон в период 2000 – 2015 г. и соответствующий линейный тренд.

Для уточнения полученной математической модели необходимо определить колебательную составляющую линии тренда, которая может быть получена из дифференциальных уравнений, определяющих способность перерабатывать загрязняющие вещества окружающей среды относительно P – количества сброшенных загрязнений и Q – переменной, описывающей сопротивление окружающей среды (в частности, очистные мероприятия) [6-10]:

$$\begin{aligned} \dot{P} &= a - bP - f(Q, P), \\ \dot{Q} &= g(Q) - h(Q, P), \end{aligned} \quad (1)$$

где коэффициент a – мощность источника загрязнения за единицу времени,



Рис. 2. – Динамика поступления загрязняющих веществ в бассейн реки Дон в период 2000 – 2015 г. и соответствующий линейный тренд

коэффициент b – коэффициент линейного уничтожения загрязнения, $f(Q, P) > 0$ - функциональный член, описывающий абсорбирование и переработку загрязнения окружающей средой, $g(Q)$ — член, описывающий динамику состояния окружающей среды в отсутствие загрязнения, $h(Q, P) > 0$ — член, описывающий деструктивное влияние загрязнения на окружающую среду.

Преобразуем уравнения (1) в систему дифференциальных уравнений (2), в которую входят дополнительные переменные D, M, N , подлежащие определению :

$$\begin{cases} P' = -Q \\ Q' = -D^2P - Mt + N \end{cases}, \quad (2)$$

где P – количество сброшенных загрязнений, Q - переменная, характеризующая уменьшение загрязнений (например, очистные мероприятия).

Перейдём от системы (2) к дифференциальному уравнению (3):

$$P'' + D^2P = -Mt + N, \quad (3)$$

Запишем уравнение (3) в конечных разностях, используя формулу (4):

$$P_k'' = P_{k+2} - 2P_{k+1} + P_k \quad (4)$$

Средствами математического пакета Mathcad была получена линейная система, имеющая следующий вид:

$$\begin{cases} AD^2 - BD^2t = 0.8D^2 + 0.3 \\ AD^2 - BD^2t = 0.7D^2 - 0.3 \\ AD^2 - BD^2t = 0.9D^2 \\ AD^2 - BD^2t = 0.8D^2 + 0.1 \\ AD^2 - BD^2t = 0.7D^2 \\ AD^2 - BD^2t = 0.7D^2 - 0.1 \\ AD^2 - BD^2t = 0.7D^2 + 0.1 \\ AD^2 - BD^2t = 0.6D^2 + 0.1 \\ AD^2 - BD^2t = 0.6D^2 - 0.2 \\ AD^2 - BD^2t = 0.6D^2 - 0.1 \\ AD^2 - BD^2t = 0.6D^2 \end{cases} \quad (5)$$

где $M = BD^2$, $N = AD^2$

Используя для решения системы (5) метод наименьших квадратов, были найдены коэффициенты A,B,D:

$$\begin{pmatrix} A \\ B \\ D \end{pmatrix} := (A, B, D) = \begin{pmatrix} -8.279 \cdot 10^5 \\ 8.826 \cdot 10^5 \\ 7.29 \cdot 10^{-5} \end{pmatrix}$$

Подставив полученные коэффициенты в уравнение (3) и применив метод Рунге-Кутты, получим решение системы (2). Уравнение (3) допускает также аналитическое решение, представленное функцией (6):

$$P(t) = A - Bt + C \cdot \cos(Dt + E) \quad (6)$$

Для нахождения неизвестных коэффициентов функции (6) был использован математический пакет Mathcad:

$$Y(x) = 40.85 - 0.02x + 0.06 \cos(1.7x + 1) \quad (7)$$

Найденная модель (7) использовалась для сглаживания статистических данных (рис. 3).

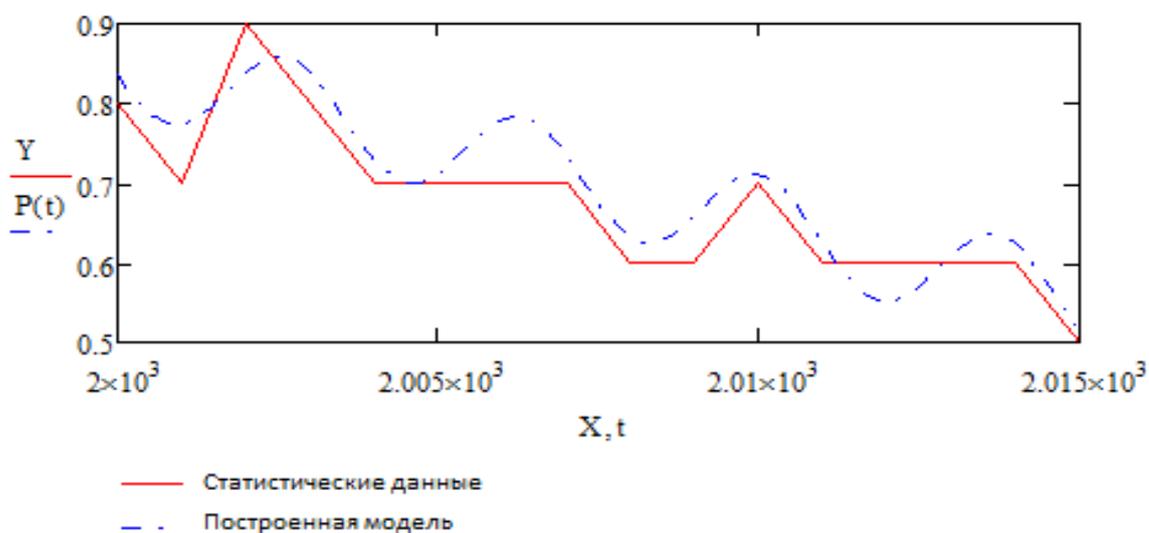


Рис. 3. – Сглаживание статистических данных посредством построенной модели

Главным критерием правильности применения прогнозной модели является проверка на адекватность и ошибку прогноза. Адекватными моделями считаются такие, для которых остаточная компонента имеет свойства независимости, случайности и нормальности распределения. Ниже представлена проверка этих критериев:

1) проверка адекватности модели (невязки):

$$\delta := \frac{\sqrt{\sum_{t=1}^{15} [(S1^{(2)})_t - Y_t]^2}}{\sqrt{\sum_{t=1}^{15} (Y_t)^2}} = 0.076,$$

где Y – статистические данные, $S1$ – данные полученной модели

2) расчёт ошибки прогноза:

$$p := \frac{|(S1^{(1)})_{15} - Y_{15}|}{|Y_{15}|} = 0.101$$

Выводы: В работе было осуществлено построение математической модели процесса загрязнения водоемов с использованием двух линий тренда: с линейной составляющей и колебательной составляющей, полученной из системы дифференциальных уравнений.

Было установлено следующее:

- если стоит задача в определении только линии тренда, то коэффициенты регрессии будут: $A = 36.1 - 0.0176$;
- если требуется идентифицировать модель, в которой есть одновременно и линейная составляющая и колебательная составляющая, коэффициенты при линейной части должны уточняться, используя формулы (3) – (6). Это объясняется тем, что исходная функция (6) содержит плато.

Расчёты показали, что величина невязки (адекватности полученной модели) не превышает 8 % при использовании линии тренда, содержащей одновременно линейную и колебательную составляющие. При прогнозировании объема выброса вредных веществ согласно функции (6) на период с 2000 по 2015 годы было установлено, что погрешность (ошибка) прогноза находится в пределах 10%. Таким образом, модель демонстрирует пригодность для краткосрочного (на три года) прогнозирования. Если уточнить коэффициенты модели A , B , C , D и E за счет рассмотрения более длинного фрагмента доступных числовых значений – вплоть до настоящего времени, мы получим возможность прогнозировать объемы загрязнения водных ресурсов на более длинные периоды с наименьшей погрешностью прогноза.

Литература

1. Ганичева Л. Современное состояние подземных вод в районе промышленных городов Ростовской области // Инженерный вестник Дона, 2013, № 2. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n2y2013/1703/.
2. Елисеева Т.П., Ежова И.М., Лакирбая И.Д. Исследование воздействия техногенных факторов на окружающую среду с целью обоснования управленческих решений по обеспечению экологической безопасности // Инженерный вестник Дона, 2014, № 2. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n2y2014/2361/.
3. Водные ресурсы России и их использование / Под ред. Проф. Шикломанова И.А. СПб. : ГГИ, 2008. 600 с.
4. Росгидромет. Ежегодники о загрязнении окружающей среды (по компонентам). URL: meteorf.ru/product/infomaterials/ezhegodniki/.
5. Российский статистический ежегодник. URL: nangs.org/analytics/rosstat-rossijskij-statisticheskij-ezhegodnik-2018-russian-statistical-yearbook-2018-rus-eng-onlajn-gar.
6. Братусь А.С., Новожилов А.С., Платонов А.П. Динамические системы и модели в биологии. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2010. 400 с.
7. Прикладная математическая статистика: Лабораторный практикум. Томск: ТУСУР, 2015. 72 с.
8. Боргоякова Т.Г., Лозицкая Е.В. Математическое моделирование: определение, применимость при построении моделей динамического процесса // Интернет-журнал «НАУКОВЕДЕНИЕ», Том 9, №2 (2017).
9. Liu J., Li Y. P., Huang G. H. Mathematical Modeling for Water Quality Management under Interval and Fuzzy Uncertainties Journal of Applied Mathematics. 2013; 2013 DOI 10.1155/2013/731568.



10. Solgi Abazar, Pourhaghi Amir, Zarei Heidar, Majallah-i āb va Khāk Hadi Ansari. Modeling and Forecast Biological Oxygen Demand (BOD) using Combination Support Vector Machine with Wavelet Transform 2017; 31(1): 86-100 DOI 10.22067/jsw.v31i1.52080.

References

1. Ganicheva L. Inzhenernyj vestnik Dona, 2013, № 2. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n2y2013/1703/.

2. Eliseeva T.P., Ezhova I.M., Lakirbaja I.D. Inzhenernyj vestnik Dona, 2014, № 2. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n2y2014/2361/.

3. Vodnye resursy Rossii i ih ispol'zovanie [Water resources of Russia and their use]. Pod red. Prof. I.A.Shiklomanova. SPb.: GGI, 2008. 600 p.

4. Rosgidromet. Ezhegodniki o zagryaznenii okruzhajushhej sredy (po komponentam) [Roshydromet. Yearbooks on environmental pollution (for components)]. URL: meteorf.ru/product/infomaterials/ezhegodniki/.

5. Rossijskij statisticheskij ezhegodnik. [Russian statistical yearbook] URL: <https://nangs.org/analytics/rosstat-rossijskij-statisticheskij-ezhegodnik-2018-russian-statistical-yearbook-2018-rus-eng-onlajn-rar>.

6. Bratus' A.S., Novozhilov A.S., Platonov A.P. Dinamicheskie sistemy i modeli v biologii [Dynamical systems and models in biology]. M.: FIZMATLIT, 2010. 400 p.

7. Prikladnaja matematicheskaja statistika: Laboratornyj praktikum [Applied mathematical statistics: Laboratory workshop]. Tomsk: TUSUR, 2015. 72 p.

8. Borgoyakova T.G., Lozickaya E.V. Internet-zhurnal «NAUKOVEDENIE» Tom 9, №2 (2017).

9. Liu J., Li Y. P., Huang G. H. Zhurnal prikladnoj matematiki. 2013; 2013 DOI 10.1155/2013/731568.



10. Abazar Solgi, Amir Pourhaghi, Heidar Zarei, Hadi Ansari Majallah-i āb va Khāk. Modeling and Forecast Biological Oxygen Demand (BOD) using Combination Support Vector Machine with Wavelet Transform 2017;31(1):86-100 DOI 10.22067/jsw.v31i1.52080.