

## Оценка влияния трения на напряженное состояния бетонного основания при воздействии на него жёсткого углового штампа

*Ю.О. Заваруев, К.А. Цветков*

*Национальный исследовательский университет Московский государственный  
строительный университет*

**Аннотация:** В работе рассмотрен пример решения плоской задачи теории пластичности применительно к бетону, имеющей место при воздействии абсолютно жесткого штампа на бетонное основание. При этом решение искалось в виде изолиний характеристик, положение которых позволяло определить напряженное состояние основания. При этом выделялось три области, отличающихся напряженным состоянием. В работе удалось проанализировать влияние трения на поверхности штампа на границы этих областей и изолинии напряжений в них. Рассматривалось 3 условия: трение отсутствует, трение постоянно, трение пропорционально большему главному напряжению. Выявлено влияние различных граничных условий на поверхности штампа на напряженное состояние бетонного основания.

**Ключевые слова:** бетон, теория пластичности, плоская задача, напряженно-деформированное состояние, напряжения, трение, угловой штамп.

### Состояние вопроса.

Проектирование надежных бетонных и железобетонных конструкций требует проведения фундаментальных исследований, посвящённых изучению особенностей поведения бетона в условиях различных напряжённых состояний. При этом приходится применять различные методы и подходы к моделированию материала, схем действующих нагрузок, видов НДС в различных зонах конструкций, адаптировать общие подходы механики деформируемого твёрдого тела к специфическим вопросам механики бетона.

Одним из направлений в моделировании поведения бетона под нагрузкой является попытка применить к этому материалу подходы теории пластичности.

Известно, что большой вклад в развитие теории пластичности бетона внёс Гениев Г. А. [1], который применил теорию пластичности бетона в том

числе и к методам определения предельной несущей способности бетона, находящегося в сложном напряженном состоянии [2,3].

Так же следует выделить работу [4], где авторами исследовалась механика сплошных сред и был разработан метод получения уравнений линий разрыва в сплошных средах, что позволило в дальнейшем определять границы областей с особыми напряженно-деформированными состояниями.

Оценка применимости различных моделей и подходов возможна в ходе решения тестовых теоретических задач [5-7], что позволяет проверить работоспособность предлагаемых методов, соответствие полученных результатов современным представлениям о материале и может послужить фундаментальной основой для решения практических задач проектирования строительных конструкций [8-10].

#### **Цели исследования. Методы.**

Предлагается рассмотреть плоскую задачу теории пластичности бетона – плоскую деформацию. Задача решена для воздействия углового штампа на бетонное основание с различными условиями по трению на границе штамп-основание. Используемые в работе фундаментальные зависимости теории пластичности бетона [3], определяют необходимость искать решение разрешающего уравнения в виде параметров, которые связаны с полями направлений характеристик линий системы уравнений этих параметров. При этом сами поля направлений имеют понятный физический смысл, определяя границы с различными закономерностями изменения напряжённого состояния. Ожидалось, что учет изменения представлений о трении на поверхности штампа окажет влияние на оценку таких границ. Аналитические решения, которые планировалось получить в ходе работы, позволят судить об особенностях оценки напряжённого состояния по полям направлений характеристик, продемонстрируют методические особенности

---

применения такого метода решения плоской задачи и будут служить повышению наглядности оценки деформированного состояния.

### Постановка задачи.

Рассматривается частный случай углового штампа, ограниченного двумя прямыми линиями (рис. 1).

Границы поверхности штампа могут быть заданы в следующем виде:

$$y = (|x| - a) \operatorname{tg} \alpha. \quad (1)$$

Граничными условиями на поверхности контакта штампа и бетонного основания в зависимости от наличия или отсутствия сил трения определяются следующими условиями:

1. Трение по поверхности контакта отсутствует:

$$\tau_n = 0. \quad (2)$$

2. Между штампом и бетонным основанием существует сила трения, величина которой постоянна и принимается равной  $k$ :

$$\tau_n = k. \quad (3)$$

3. Сила трения между штампом и бетонным основанием принимается пропорциональной нормальному давлению:

$$|\tau_n| = \sigma_n \operatorname{tg} \rho. \quad (4)$$

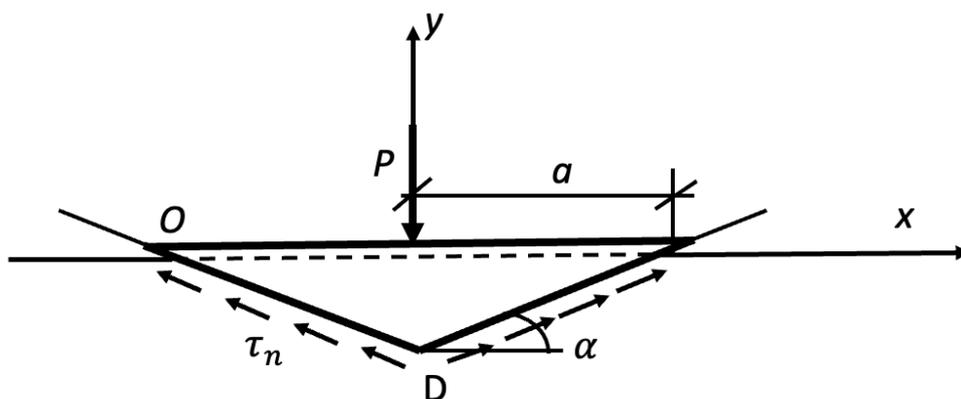


Рис.1 - Схема воздействия штампа на бетонное основание

Механические характеристики бетона основания:

Бетон класса В20:  $R_c=11,5$  МПа;  $R_p=0,9$  МПа.

Геометрические характеристики штампа:  $\alpha = 30^0$ ;  $a = 20$ м.

### Теоретические основы исследования.

При выбранной схеме воздействия в бетонном основании имеет место плоская деформация.

Воспользуемся условием пластичности, предложенным в [3]:

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 - 2(R_c - R_p)(\sigma_1 + \sigma_2) - \frac{1}{3}(R_c - R_p)^2 = 0 \quad (5)$$

Для удобства были приняты следующие обозначения:

$$p = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}; t = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \quad (6)$$

$$S_0 = \frac{R_c + R_p}{2}; T_0 = \frac{R_c - R_p}{2}. \quad (7)$$

Тогда условие пластичности (5) примет следующий вид:

$$t^2 - 2T_0p - \frac{1}{3}S_0^2 = 0 \quad (8)$$

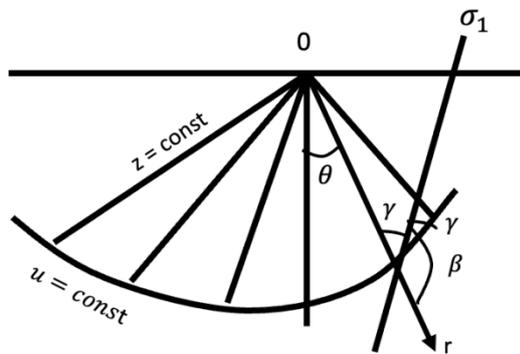


Рис.2 - Полярная система координат. Изолинии характеристик  $u$  и  $z$ .

Введем в соответствии с (рис. 2) полярную систему координат, обозначив через  $\beta$  угол между положительным направлением радиуса  $r$  и направлением большего главного нормального напряжения в рассматриваемой точке. Тогда напряжения на произвольной площадке будут определяться соотношениями

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{t^2}{2T_0} + t \cos 2\beta - \frac{S_0^2}{6T_0} \\ \sigma_\theta &= \frac{t^2}{2T_0} - t \cos 2\beta - \frac{S_0^2}{6T_0} \\ \tau_{r\theta} &= t \sin 2\beta \end{aligned} \right\}. \quad (9)$$

Подставляя (9) в дифференциальные уравнения равновесия

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{2\tau_{r\theta}}{r} &= 0 \end{aligned} \right\}, \quad (10)$$

получим основную систему двух квазилинейных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка относительно неизвестных функций  $t$  и  $\beta$ :

$$\left. \begin{aligned} \left( \frac{t}{T_0} + \cos 2\beta \right) \frac{\partial t}{\partial r} + \sin 2\beta \frac{1}{r} \frac{\partial t}{\partial \theta} - 2t \left[ \sin 2\beta \frac{\partial \beta}{\partial r} - \frac{\cos 2\beta}{r} \left( \frac{\partial \beta}{\partial \theta} + 1 \right) \right] &= 0 \\ \sin 2\beta \frac{\partial t}{\partial r} + \left( \frac{t}{T_0} - \cos 2\beta \right) \frac{1}{r} \frac{\partial t}{\partial \theta} + 2t \left[ \cos 2\beta \frac{\partial \beta}{\partial r} + \frac{\sin 2\beta}{r} \left( \frac{\partial \beta}{\partial \theta} + 1 \right) \right] &= 0 \end{aligned} \right\}. \quad (11)$$

Дифференциальные уравнения полей направлений характеристик имеют вид

$$\frac{rd\theta}{dr} = \operatorname{tg}(\beta \pm \gamma), \quad (12)$$

где  $\gamma$  определится по (13):

$$\gamma = \frac{1}{2} \arccos \frac{T_0}{t} \quad (13)$$

Таким образом, зависимость (12) показывает, что характеристики основной системы образуют с направлением  $r$  углы  $\beta + \gamma$  и  $\beta - \gamma$  и пересекаются друг с другом под переменным углом  $2\gamma$  (рис. 2).

Исследование системы (11) устанавливает следующие дифференциальные зависимости между искомыми функциями  $t$  и  $\beta$ :

на характеристиках  $z = \text{const}$ ,

$$\frac{\sqrt{t^2 - T_0^2}}{tT_0} dt + 2(d\beta + d\theta) = 0, \quad (14)$$

где

$$d\theta = \frac{dr}{r} \operatorname{tg}(\beta + \gamma); \quad (15)$$

И на характеристиках  $u = \text{const}$ ,

$$\frac{\sqrt{t^2 - T_0^2}}{tT_0} dt - 2(d\beta + d\theta) = 0, \quad (16)$$

где

$$d\theta = \frac{dr}{r} \operatorname{tg}(\beta - \gamma); \quad (17)$$

Интегрируя соотношения (14) и (16) и используя соотношение (13) были получены следующие зависимости между искомыми функциями  $t$  и  $\beta$  на характеристиках:

$$\operatorname{tg}2\gamma - 2\gamma + 2(\beta + \theta) = C_1(z) = \text{const}; \quad (18)$$

$$\operatorname{tg}2\gamma - 2\gamma - 2(\beta + \theta) = C_2(u) = \text{const}. \quad (19)$$

### Результаты определения границ областей с особенностями напряженного состояния.

Плоское деформированное состояние бетона может быть разделено на зоны I, II, III.

**В области I (СОВ)** существует простейшее напряженное состояние ( $\sigma_2 = 0$ ).

Характеристики в этой области – прямые линии, образующие с осью X углы  $\gamma_0$ , заданные соотношением:

$$\gamma = \gamma_0 = \frac{1}{2} \arccos \frac{T_0}{T_0 + \sqrt{T_0^2 + \frac{S_0^2}{3}}} \quad (20)$$

Вычислив для наших условий  $T_0$  и  $S_0$  по (7):

$$T_0 = 5,3 \text{ МПа};$$

$$S_0 = 6,2 \text{ МПа, получим}$$

$$\gamma = \gamma_0 = \frac{1}{2} \arccos \frac{T_0}{T_0 + \sqrt{T_0^2 + \frac{S_0^2}{3}}} = 32,10.$$

Область I представляет собой равнобедренный треугольник ( $BC=OB$ ), длина основания которого  $CO$  устанавливается после получения решения в области II.

**В области II (ВОА)** существует особое напряженное состояние.

Используя граничные условия на прямой  $OB$  ( $z=const$ ) можно получить выражение условий на характеристиках  $u=const$ :

$$\tan 2\gamma = 2\theta + (\tan 2\gamma_0 + 2\gamma_0) + \pi = 2,10359.$$

Тогда для заданного значения  $\theta$  можно вычислить соответствующее значение  $\gamma$ :  $\gamma = 32,29^\circ$ .

В области II следующие параметры изменяются:

$$\begin{cases} \gamma = \gamma(\theta); \\ t = t(\theta); \\ \beta = \beta(\theta). \end{cases} \quad (21)$$

Для определения границ зоны необходимо получить аналитическое выражение уравнений характеристик второго семейства  $u=const$ . Используя (12), запишем

$$d\theta = \frac{dr}{r} \tan(\pi - 2\gamma) = -\frac{dr}{r} \tan(2\gamma). \quad (22)$$

Опуская промежуточные выкладки, запишем искомое уравнение характеристик второго семейства:

$$r = \frac{r_0}{\sqrt{1 + \frac{2\theta + \pi - 2\gamma_0}{\tan 2\gamma_0}}}. \quad (23)$$

Уравнение (23) будет использоваться в дальнейшем при определении границ распространения предельного состояния бетона (длина участков  $OC$  и  $O'S'$ ) при заданной ширине полосы приложения нагрузки.

Для области III (OAD) необходимо рассмотреть три указанных выше условия по трению на поверхности штампа. Эти же условия будут влиять и на границы зон I и II.

### 1. Случай идеально-гладкого штампа.

В этом случае в области III имеет место простейшее напряженное состояние. Траектории большего главного напряжения  $\sigma_1$ - прямые линии, нормальные к поверхности контакта штампа и бетонного основания.

Трансцендентное уравнение для определения значения  $\gamma = \bar{\gamma}$  на граничной линии OA:

$$\tan 2\bar{\gamma} - 2\bar{\gamma} = -2\alpha + (\tan 2\gamma_0 - 2\gamma_0) + \pi = 3,04599. \quad (24)$$

Дифференциальные уравнения полей направлений характеристик принимают вид:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} = \tan(\beta \pm \bar{\gamma}) = \tan\left[\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \pm \bar{\gamma}\right] = \\ = \begin{cases} -\cot(\bar{\gamma} - \alpha) = -6,6208 \\ \cot(\bar{\gamma} + \alpha) = 0,39212 \end{cases} \end{aligned} \quad (25)$$

Сетка характеристик составлена двумя семействами прямых линий, образующих с осью X постоянные углы:

$$\left[\frac{\pi}{2} - (\bar{\gamma} + \alpha)\right] = [24,411^0] \text{ и } \left[\frac{\pi}{2} + (\bar{\gamma} - \alpha)\right] = [98,589^0].$$

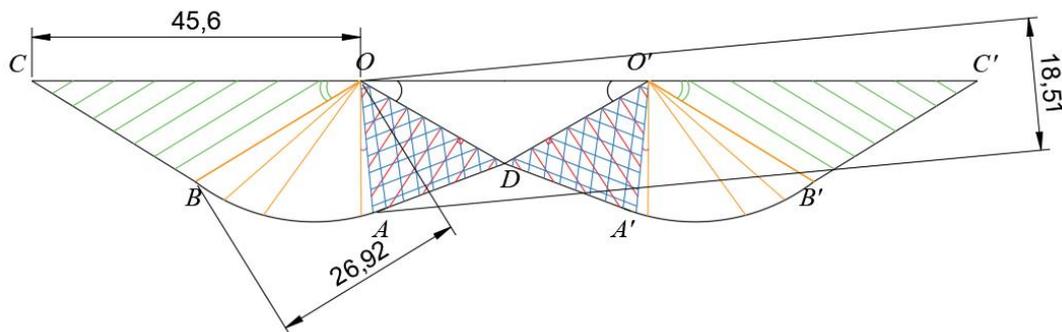


Рис. 3 - Схема разделения плоского деформированного состояния бетона на зоны I, II, III,  $\tau_n = 0$ .

Теперь характерные размеры границ областей могут быть определены из простых геометрических соображений.

Длина граничной линии OA составляет:

$$OA = \frac{a}{2 \cos \alpha} \cdot \frac{1}{\sin \bar{\gamma}} = 18,53 \text{ м}. \quad (26)$$

Длина линии OB определится по уравнению (23) при условиях:

$$\begin{cases} \theta = \bar{\theta} = \bar{\gamma} - \alpha = 0,139626 \\ r = \bar{r}; \\ r_0 = r_0^{max} = OB. \end{cases} \quad (27)$$

$$OB=26,92 \text{ м.}$$

Длина отрезка  $OC$  – границы области  $I$  ( $COB$ ) – составляет:

$$OC = 2r_0^{max} \cos \gamma_0 = 45,60 \text{ м.} \quad (28)$$

**2. Теперь рассмотрим условие, согласно которому на поверхности контакта штампа и бетонного основания действует сила трения, величина которой постоянна и принимается равной  $k$  ( $k=8\text{МПа}$ ).**

Введем вспомогательную величину  $\delta$ :

$$k = t \sin 2\delta; \delta = \frac{1}{2} \arcsin \frac{k}{t} = 20,197^\circ. \quad (29)$$

В области  $III$  ( $OAD$ ) имеется простейшее напряженное состояние. Траектории большего главного нормального напряжения  $\sigma_1$  представляют собой прямые линии, отклоняющиеся от нормали к линии контакта штампа и бетонного основания на угол  $\delta$ , и образуют с осью  $X$  угол:

$$\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha - \delta = 39,803^\circ. \quad (30)$$

Граничные условия на линии  $OA$ :

$$\begin{cases} \theta = \bar{\theta} = \bar{\gamma} - (\alpha + \delta) = -12,8688^\circ, \\ \gamma = \bar{\gamma}. \end{cases} \quad (31)$$

Не приводя промежуточных вычислений, запишем уравнение для определения угла  $\bar{\gamma}$ :

$$\tan 2\bar{\gamma} - 2\bar{\gamma} = (\tan 2\gamma_0 - 2\gamma_0) + \pi - 2(\alpha + \delta) = 2,341. \quad (32)$$

$$\bar{\gamma} = 0,6515 = 37,3282^\circ.$$

Дифференциальные уравнения полей направлений характеристик принимают вид:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} = \tan(\beta \pm \bar{\gamma}) &= \tan \left[ \left( \frac{\pi}{2} - [\alpha + \delta] \right) \pm \bar{\gamma} \right] = \\ &= \begin{cases} -\cot(\bar{\gamma} - [\alpha + \delta]) = 4,3772 \\ \cot(\bar{\gamma} + [\alpha + \delta]) = 0,04322 \end{cases} \quad (33) \end{aligned}$$

Сетка характеристик образована двумя семействами прямых линий, составляющих с осью  $X$  постоянные узлы  $\left[\frac{\pi}{2} + \bar{\gamma} - (\alpha + \delta)\right] = [77,1312^0]$  и  $\left[\frac{\pi}{2} - (\bar{\gamma} + \alpha + \delta)\right] = [2,4748^0]$  (34)

Теперь можно определить границы областей по схеме аналогичной предыдущему случаю.

В результате получаем:

$$OA = 19,04\text{м};$$

$$OB = 25,27\text{ м};$$

$$OC = 42,82\text{м}.$$

Результаты определения областей I, II, III при  $\tau_n = k$  приведены на рис. 4.

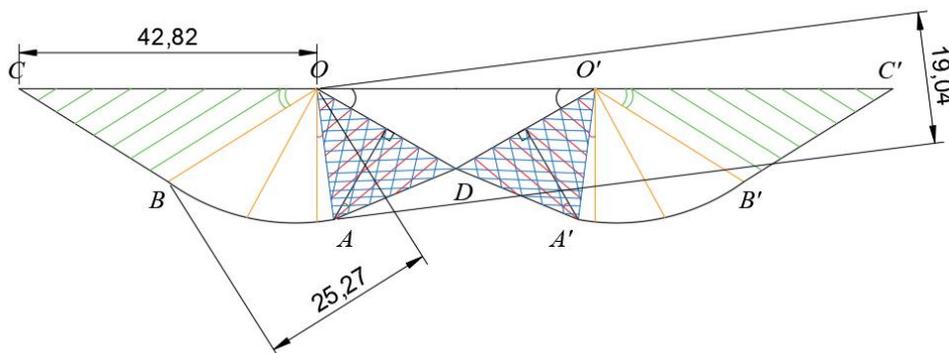


Рис. 4 - Схема разделения плоского деформированного состояния бетона на зоны I, II, III,  $\tau_n = k$ .

**3. В заключении рассмотрим случай, когда по поверхности контакта штампа и бетонного основания действует сила трения, величина которой пропорциональна нормальному давлению, где  $p$  - максимальный угол трения.**

Найдем значение этого угла из условия равновесия тела, которое от соскальзывания с наклонной поверхности удерживает сила трения скольжения, принимая коэффициент трения  $\mu = 0,45$ . Получим  $p = 24,23^0$ .

Для определения значения угла  $\beta$  на линии контакта имеем трансцендентное уравнение:

$$-t \sin 2(\beta - \varphi) = C(t) \tan p - t \cos 2(\beta - \varphi) \tan p, \text{ где} \quad (35)$$

$$C(t) = \frac{t^2}{2T_0} - \frac{S_0^2}{6T_0}.$$

Решение этого уравнения имеет вид:

$$2(\beta + \alpha) = \\ = \operatorname{arctg} \left( -\frac{1}{\tan p} \right) + \arccos \left( \frac{C(t) \tan p}{t \sqrt{1 + (\tan p)^2}} \right) = p - \frac{\pi}{2} + \arccos \left[ \frac{C(t)}{t} \sin p \right] \quad (36)$$

Отсюда:

$$\beta = \frac{p}{2} - \frac{\pi}{4} - \alpha + \frac{1}{2} \arccos \left[ \frac{C(t)}{t} \sin p \right]. \quad (37)$$

Введя в рассмотрение вспомогательную величину  $\delta$  по уравнению

$$\tau_n = t \sin 2\delta. \quad (38),$$

получаем:

$$\delta = \frac{p}{2} - \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \arccos \left[ \frac{C(t)}{t} \sin p \right]. \quad (39)$$

Распределение напряжений в области III такое же, как в задаче о штампе при постоянной силе трения.

Граничные условия на  $OA$  определяет условие:

$$\begin{cases} \theta = \bar{\theta} = \bar{\gamma} - (\alpha + \delta), \\ \gamma = \bar{\gamma}. \end{cases} \quad (40)$$

Находим:

$$\theta = \bar{\gamma} - \alpha - \frac{p}{2} + \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \arccos \left[ \frac{C(t)}{t} \sin p \right] \quad (41)$$

Уравнение для определения значения угла  $\bar{\gamma}$  запишется в виде:

$$\tan 2\bar{\gamma} - 2\bar{\gamma} = -2\alpha - p - \frac{3\pi}{2} - \arccos \left[ \frac{C(t)}{t} \sin p \right] + (\tan 2\gamma_0 - 2\gamma_0) \quad (42)$$

$$\bar{\gamma} = 0,6743 = 38,6345^\circ.$$

Для определения конфигурации областей по (37), (39) и (41) определим необходимые углы:

$$\beta = -30,894^\circ;$$

$$\delta = -0,894^{\circ};$$

$$\theta = 9,528^{\circ};$$

Дифференциальные уравнения полей направлений характеристик принимают вид:

$$\frac{dy}{dx} = \tan(\beta \pm \bar{\gamma}) = \begin{cases} 0,1359 \\ -2,679 \end{cases} \quad (43)$$

Сетка характеристик образована двумя семействами прямых линий, составляющих с осью  $X$  постоянные узлы:

$$\left(\frac{p}{2} - \frac{\pi}{4} - \alpha + \frac{1}{2} \arccos \left[ \frac{c(t)}{t} \sin p \right] + \bar{\gamma} \right) = [7,74]$$
$$\text{и} \left(\frac{p}{2} - \frac{\pi}{4} - \alpha + \frac{1}{2} \arccos \left[ \frac{c(t)}{t} \sin p \right] - \bar{\gamma} \right) = [-69,528];$$

Определение характерных геометрических размеров аналогично предыдущему случаю.

$$OA = 18,49 \text{ м};$$

$$OB = 27,05 \text{ м};$$

$$OC = 45,82 \text{ м};$$

Результаты определения областей I, II, III при  $\tau_n = \sigma_n \operatorname{tg} p$  приведены на рис.5

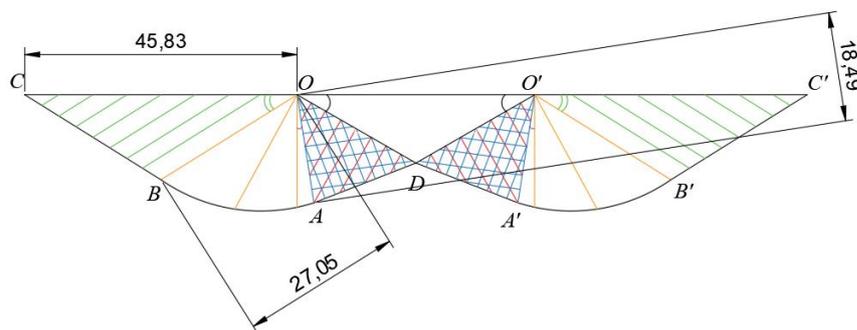


Рис 5. - Схема разделения плоского деформированного состояния бетона на зоны I, II, III,  $\tau_n = \sigma_n \operatorname{tg} p$ .

### Анализ полученных результатов.

Обобщим результаты определения параметров, определяющие границы областей с различным напряженно-деформированном состоянием.

В таблице 1 приведены сведения об угле  $\gamma$  наклона линий 1-й группы характеристик ( $z = \text{const}$ ) и изолиний наибольшего главного напряжения  $\sigma_1$ .

Напомним, что вычисление этого угла имело определяющее значение для последующего определения длин отрезков, ограничивающих зоны.

Таблица №1

Значения  $\gamma$  для областей с различным напряженно-деформированным состоянием.

Область	Условия по трению на границе штампа	$\gamma$ , в град
I	-	32,10
II	-	32,29
III	0	38,59
III	k	37,33
III	$\sigma_n \text{tg} \rho$	38,64

границ областей приведены в таблице 2.

Длины отрезков, ограничивающих области I, II, III, для наглядности представлены в отношении к половине длины основания треугольного штампа  $a$ .

Из представленных таблиц видно, что учет условия, при котором трение принимается пропорциональным главному напряжению, сближает положение изолиний наибольшего главного напряжения и границ областей с различным видом напряженно-деформированного состояния, с ситуацией, когда трение не учитывается. При этом предположение, что трение на границе штампа постоянно несколько уменьшает зоны влияния штампа на

основания и сужает его границы по сравнению с условиям, что трение отсутствует или линейно-переменно.

Таблица №2

Границы областей с различным напряженно-деформированным состоянием с учетом особенностей постановки условий по трению на границе штампа.

Условия по трению $\tau_n$	Относительные длины отрезков ( $a=20m$ )			
	$OA$	$OB$	$OC$	$CC'$
0	$0,93a$	$1,345a$	$2,28a$	$6,56a$
$k$	$0,93a$	$1,26a$	$2,14a$	$6,28a$
$\sigma_n \operatorname{tgp}$	$0,93a$	$1,35a$	$2,29a$	$6,58a$

### Выводы по результатам исследования.

1. При воздействии жесткого штампа на бетонное основание возникает плоское деформированное состояние, при этом можно выделить три области, напряженное состояние в которых отличается.

2. Рассмотрен вопрос влияния трения на поверхности штампа на изменение напряженного состояния бетонного основания. Оценивалось изменение положения изолиний главных напряжений, размеров и формы характерных областей напряженного состояния.

3. Результаты расчетов показали, что напряженное состояние при отсутствии трения и в предположении, что трение пропорционально наибольшему главному напряжению, практически совпадает. Вместе с тем, при постоянном трении положение изолиний несколько отклоняется от своего положения при других условиях. Однако если такое изменение можно считать несущественным, то границы областей с особым напряженным состоянием при постоянном трении заметно отличаются от полученных в

предположении, что трение отсутствует или изменяются пропорционально напряжению.

4. Полученные результаты имеют также отдельную ценность как результат тестирования предложенных подходов оценки напряженно-деформированного состояния бетона с привлечением аппарата теории пластичности и использованием для его описания сетки характеристик и изолиний напряжений.

### Литература

1. Гениев Г. А., Киссюк В. Н. Вопросы прочности массивных конструкций из бетона и каменных материалов. // Сб. ст. «Строительные конструкции. Исследование прочности конструкций из неупругих материалов». – М.Изд. ЦНИИСК им. Кучеренко, вып. 4. 1969 – с.40-48.

2. Гениев Г.А., Киссюк В.Н., Тюпин Г.А. Теория пластичности бетона и железобетона. - М.:Стройиздат, 1974 - 316 с.

3. Гениев Г. А. Обобщенная плоская задача для деформационной теории пластичности бетона. // Сб. ст. под ред. проф. А.Р. Ржаницына. Строительные конструкции. Теория и методы расчета» вып. 13. – М.: Изд. ЦНИИСК им. Кучеренко, 1970 – с. 78-87.

4. Христианович С. А., Михлин. С. Г., Девисон. Б. Б. Некоторые новые вопросы механики сплошной среды. – М.: Изд. АН СССР, 1964 г. – 210 с.

5. Asai M., Terada K., Ikeda K. Meso-scopic concrete analysis with a lattice model // Fracture Mechanics of Concrete Structures, 2001. pp. 757 – 764.

6. Kickelbick G. (Editor). Hybrid Materials: Synthesis, Characterization, and Applications. 2007. Wiley, 516 p7.

7. Языев Б.М., Чепуренко А.С., Муханов А.В. Оптимизация толстостенной железобетонной оболочки на основании решения обратной задачи механики неоднородных тел // Инженерный вестник Дона, 2013, №3, URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n3y2013/1891.

8. Бандурин М.А., Бандурин В.А. Методы моделирования напряженно-деформированного состояния для определения остаточного ресурса железобетонного консольного водосброса при различных граничных условиях. // Инженерный вестник Дона, 2013, №4, URL:ivdon.ru/ru/magazine/archive/n4y2013/2039.

9. Торяник М.С. Расчет железобетонных конструкций при сложных деформациях. – М. Стройиздат, 1974 г. – 294 с.

10. Галаустов К.З. Нелинейная теория ползучести бетона и расчет железобетонных конструкций. – М.: Физматлит, 2006 г. – 248 с.

### References

1. Geniyev G. A., Kissyuk V. N. M. Izd. TSNIISK im. Kucherenko, vyp. 4. 1969 , pp. 40-48.

2. Geniyev G.A., Kissyuk V.N., Tyupin G.A. Teoriya plastichnosti betona i zhelezobetona. [Theory of plasticity of concrete and reinforced concrete.] М.: Stroyizdat, 1974 ,316 p.

3. Geniyev G. A., Tyupin G. A. М.: Stroyizdat, 1968 ,pp. 25-39.

4. Khristianovich S. A., Mikhlin. S. G., Devison. B. B. Nekotoryye novyye voprosy mekhaniki sploshnoy sredy. [Some new questions in continuum mechanics] – М.: Izd. AN SSSR, 1964 g., 210 p.

5. Asai M., Terada K., Ikeda K. Meso-scopic concrete analysis with a lattice model // Fracture Mechanics of Concrete Structures, 2001. pp. 757 – 764.

6. Kickelbick G. (Editor). Hybrid Materials: Synthesis, Characterization, and Applications. 2007. Wiley, 516 p

7. Yazyuev B.M., Cherpurnenko A.S., Mukhanov A.V. Inzhenernyi vestnik Dona, 2013, №3, URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n3y2013/1891.

8. Bandurin M.A., Bandurin V.A. Inzhenernyi vestnik Dona, 2013, №4, URL:ivdon.ru/ru/magazine/archive/n4y2013/2039.

---



9. Toryanik M.S. Raschet zhelezobetonnykh konstruktsiy pri slozhnykh deformatsiyakh. [Calculation of reinforced concrete structures with complex deformations]– М. Stroyizdat, 1974 g. 294 p.

10. Galaustov K.Z. Nelineynaya teoriya polzuchesti betona i raschet zhelezobetonnykh konstruktsiy. [Nonlinear theory of concrete creep and calculation of reinforced concrete structures]. М.: Fizmatlit, 2006 g. 248 p.